# Mat10 eksamensspørgsmål

Martin Geisler <gimpster@gimpster.com>

9. januar 2002

**Resumé**

Dette dokument er en gennemgang af de eksamensspørgsmål der blev stillet til den mundtlige eksamen i Mat10, januar 2002 på Aarhus Universitet. Gennemgangen bygger på bogen *Linear Algebra* af Fraleigh & Beauregard, tredje udgave. Du kan bruge dokumentet på de samme vilkår som jeg, nemlig på eget ansvar.

## 1 Løsning af lineære ligningssystemer

**En matrix** En *matrix* er en kortere notation for et liniert ligningssystem. Har vi $n$ lineære ligninger med $m$ ubekendte:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

så skriver vi det som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

**Elementær rækkeoperation** Man kan lave tre *elementære rækkeoperationer* på et ligningssystem: Man kan ombytte to rækker, man kan skalere en række og man kan addere et multiplum af en række til en anden række.

**Invarians af løsningsmængden under ERO** Løsningsmængden ændres ikke ved elementære rækkeoperationer.

Ved rækkeombytninger og rækkeskaleringer sker der ingen ændring af løsningsmængden, da disse operationer blot svarer til normale reduceringer af ligninger i et ligningssystem.

Ved skalering og addition af én række til en anden række, bliver løsningsmængden ikke gjort mindre. Vi har altså at $L \subseteq L'$, hvor L er løsningsmængden for det oprindelige system $[A|b]$, mens $L'$ er løsningsmængden for $[A'|b']$.

Men da $[A'|b'] \sim [A|b]$, gælder der også at $L' \subseteq L$, hvilket medfører at $L = L'$.

## 2 Invers matrix

**Invertibel matrix** Hvis $AC = CA = I$, er $A$ *invertibel*, og C kaldes $A$'s invers. Vi skriver $A^{-1}$ i stedet for C.

**FB 1.9 Entydighed af invers** Hvis $AC = DA = I$, så er $C = D$.

Vi regner på $D(AC)$ og får

$$DAC = \begin{cases} D(AC) = DI = D \\ (DA)C = IC = C \end{cases}, \tag{2.1}$$

hvilket må betyde at $C = D$.

**FB 1.11 Kommutivitet af invers** Hvis $CA = I$, så er $AC = I$.

Antag at $AC = I$. Så har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsninge for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, da $C\mathbf{b}$ altid vil være en løsning. Det fortæller os, at $A$ er rækkeækvivalent med identitetsmatricen. Vi ved altså nu, at

$$A \sim I \Leftrightarrow (E_t \cdots E_2 E_1)A = I \quad \text{og} \quad AC = I. \tag{2.2}$$

Den inverse er entydig, så $C = E_t \cdots E_2 E_1$, hvilket giver os at $CA = I$.

## 3 Vektorrum og underrum

**Vektorrum** Et *vektorrum* er en mængde af vektorer, der opfylder en række regler for addition og skalarmultiplikation.

**Underrum** $W$ er et *underrum* af $V$, hvis det er lukket under addition (3.1) og skalarmultiplikation (3.2):

$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W : \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W \tag{3.1}$$

$$\forall\, \mathbf{u} \in W, r \in \mathbb{R} : r\mathbf{u} \in W \tag{3.2}$$

**Basis** Se definitionen på denne side.

**Unik lineær kombination** En mængde af vektorer $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ udgør en basis for $W$, hvis de udspænder $W$, og

$$r_1\mathbf{b}_1 + r_2\mathbf{b}_2 + \cdots + r_m\mathbf{b}_m = \mathbf{0} \Rightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0 \tag{3.3}$$

Antag først at $B$ er en basis for $W$. Da $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$ er en løsning til (3.3), er der ikke andre, da løsningen er entydig.

Antager vi modsat, at $0\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 + \cdots + 0\mathbf{b}_m = \mathbf{0}$ er den eneste linearkombination der giver nulvektoren, men at $\mathbf{v} \in W$ kan opskrives på to forskellige måder:

$$r_1\mathbf{b}_1 + r_2\mathbf{b}_2 + \cdots + r_m\mathbf{b}_m = \mathbf{v} \tag{3.4}$$
$$s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_m\mathbf{b}_m = \mathbf{v}. \tag{3.5}$$

Det betyder at

$$\mathbf{0} = (r_1 - s_1)\mathbf{b}_1 + (r_2 - s_2)\mathbf{b}_2 + \cdots + (r_m - s_m)\mathbf{b}_m, \tag{3.6}$$

hvilket videre giver os at $r_i - s_i = 0$, sådan at $r_i = s_i$. Man kan altså kun opskrive $\mathbf{v}$ som en linearkombination af elementer fra $B$ på én måde.

# 4 Lineær uafhængighed

**Afhængighedsrelation** Vi siger, at der er en *afhængighedsrelation* mellem en mængde af vektorer, hvis ligningen

$$r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

har andre løsninger end den trivielle $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.

**Unik lineær kombination** Se sætningen på denne side.

**Invarians under liniære transformationer** Hvis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ er uafhængige vektorer i $V$, og $T : V \mapsto V'$ er en liniær transformation, så er $B' = \{T(\mathbf{b}_1), T(\mathbf{b}_2), \dots, T(\mathbf{b}_n)\}$ også en uafhængig mængde.

# 5 Basis for vektorrum

**Basis** En mængde af vektorer udgør en *basis* for et vektorrum, hvis de er uafhængige og udspænder rummet.

**Antal frembringende og uafhængige vektorer** Hvis $w_1, w_2, \dots, w_k$ er frembringende vektorer i $W$ og $v_1, v_2, \dots, v_m$ er uafhængige vektorer i $W$, så er $k \geq m$.

Vi laver et modstridsbevis ved at antage, at $k < m$. Alle $v_i$ kan skrives som en linearkombination af $w_j$:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{k1}w_k \\ v_2 &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{k2}w_k \\ &\vdots \\ v_m &= a_{1m}w_1 + a_{2m}w_2 + \dots + a_{km}w_k \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ved at udregne $x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_mv_m$ kan vi finde en afhængighedsrelation. Vi kan få summen til at give $0$ hvis der er en løsning til

$$\begin{aligned} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_ma_{1m} &= 0 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_ma_{2m} &= 0 \\ &\vdots \\ x_1a_{k1} + x_2a_{k2} + \dots + x_ma_{km} &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Det er der altid, da der er $m$ ubekendte, men kun $k$ ligninger, hvor $k < m$ ifølge antagelserne. Så $v_1, v_2, \dots, v_m$ er altså ikke uafhængige, hvis $m > k$.

**Eksistensen af en basis** Ethvert underrum $W \subseteq \mathbb{R}^n$ har en basis og kan skrives som $W = \text{sp}(w_1, w_2, \dots, w_k)$ hvor $k \leq n$.

Lad $W \neq \{0\}$. For at finde en basis for $W$, starter vi med en vektor $w_1 \neq \mathbf{0}$. Hvis $\text{sp}(w_1) = W$ er vi færdige, ellers vælges endnu en vektor $w_2$ sådan at $w_1$ og $w_2$ er uafhængige. Det kan lade sig gøre, da der findes vektorer i $W$, der ikke er en linearkombination af $w_1$. Hvis $\text{sp}(w_1, w_2) = W$ er vi færdige, ellers fortsættes der på samme måde. Processen stopper efter et endeligt antal trin, da der højst skal bruges $n$ vektorer til at udspænde $W$.

Hvis $W = \{0\}$, så er $W = \text{sp}(\mathbf{0})$, men da $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$ for all $r \in \mathbb{R}$, er $B = \{\mathbf{0}\}$ ikke en basis for $W$. Vi *definerer* derfor basis til at være $B = \{\}$. Dimensionen bliver således $0$.

**Dimension af et underrum** Se definitionen på den følgende side.

**Invarians af dimension** Se sætningen på næste side.

## 6 Dimension og rang

**Dimension af et underrum** Antallet af vektorer i en basis for underrummet siges at være *dimensionen* af underrummet.

**Invarians af dimension** To forskellige baser for det samme underrum, vil bestå af det samme antal vektorer.

Lad $B$ og $B'$ være to baser for $W$ med $k$ og $m$ vektorer. Vi har så $k$ vektorer der udspænder $W$, og $m$ uafhængige vektorer. Det betyder at $m \leq k$. Men omvendt har vi også $m$ frembringende vektorer og $k$ uafhængige vektorer, så $k \leq m$. Altså er $k = m$.

**Rangen af en matrix** Dimensionen af søjlerummet og rækkerummet er den samme for en matrix og kaldes *rangen*.

**Rangligningen (Grassmans dimensionsformel)** Antallet af søjler med pivot, plus antallet af søjler uden giver tilsammen det totale antal søjler. Lad $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$:

$$\mathrm{rang}(A) + \mathrm{nullity}(a) = n. \tag{6.1}$$

## 7 Koordinatisering af vektorrum, basisskift

**Ordnet basis** Ved en *ordnet basis* forstår man en basis hvor rækkefølgen af elementerne har betydning. Man skriver $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$.

**Koordinat vektor** Man kan koordinatisere vektorer i et abstrakt vektorrum $V$ efter en ordnet basis. Vi skriver $\mathbf{v}_B$ for koordinatvektoren for $\mathbf{v} \in V$ med hensyn til den ordnede basis $B$.

Hvis $\mathbf{v} = r_1\mathbf{b}_1 + r_2\mathbf{b}_2 + \cdots + r_k\mathbf{b}_k$ er $\mathbf{v}_B = [r_1, r_2, \ldots, r_k]$.

**Basis matrix** Hvis $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$, kalder vi matricen

$$M_B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

for *basis matricen* hørende til $B$. Vi ser at

$$\mathbf{v} = M_B \mathbf{v}_B \tag{7.2}$$

**Basisskiftematrix** Man kan koordinatisere efter forskellige ordnede baser. Hvis både $B$ og $B'$ er ordnede baser, gælder der at

$$\mathbf{v} = M_B \mathbf{v}_B = M_{B'} \mathbf{v}_{B'}, \tag{7.3}$$

og da både $M_B$ og $M_{B'}$ er invertible matricer, kan vi finde $\boldsymbol{v}_{B'}$:

$$\boldsymbol{v}_{B'} = M_{B'}^{-1} M_B \boldsymbol{v}_B. \tag{7.4}$$

Matricen $C_{B,B'} = M_{B'}^{-1} M_B$ kaldes *koordinatskiftematricen* fra den gamle base $B$ til den nye base $B'$. Man finder $C_{B,B'}$ således:

$$[M_{B'} | M_B] \sim [I | C_{B,B'}]. \tag{7.5}$$

# 8 Determinanter

**Minor** For en $n \times n$ matrix $A$, er *minor* matricen $A_{ij}$ lig $A$, blot er den i'te række og den j'te søjle fjernet. Resultatet er en $(n-1) \times (n-1)$ matrix.

**Cofaktor** Til udregning af determinanter skal man bruge *cofaktorer*. Den $i, j$ cofaktor er givet ved

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \tag{8.1}$$

**Determinanten** Vi definerer *determinanten* for en matrix rekursivt:

$$\det(a) = a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} + \cdots + a_{1n}a'_{1n} \tag{8.2}$$

I (8.2) udvikler vi efter første række. Man kan udvikle efter en vilkårlig række eller søjle.

**Determinanten af en triangulær matrix** Det er særlig nemt at udregne determinanten af en triangulær matrix — determinanten er blot produktet af diagonalindgangene.

Lad $U$ være en øvre triangulær matrix:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

Ved hele tiden at udvikle efter første søjle i hver minor, bliver determinanten:

$$\begin{aligned}
\det(U) &= u_{11} \left| \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{33} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & u_{nn} \end{bmatrix} \right| \\
&= u_{11}u_{22} \left| \begin{bmatrix} u_{33} & u_{34} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{44} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & u_{nn} \end{bmatrix} \right| \\
&= u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

**Transponering** Ved transponering ændres determinanten ikke: $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.

Det er trivielt at konstatere at rigtigheden for $2 \times 2$ matricer — vi vil som induktionsantagelse gå ud fra, at udsagnet passer op til $(n-1) \times (n-1)$ matricer. Lad så $A \in \mathrm{Mat}_n$ og sæt $B = A^T$. Så er

$$\det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}| \quad \text{og} \tag{8.5}$$

$$\det(B) = b_{11}|B_{11}| - b_{21}|B_{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}b_{n1}|B_{n1}|, \tag{8.6}$$

hvor $a_{ij} = b_{ji}$ da $A^T = B$. I følge induktionsantagelsen er $|A_{ij}| = |B_{ij}|$, hvilket betyder at begge ligninger er ens.

**Rækkeombytning** Determinanten skifter fortegn ved rækkeombytning.

Vi ser på tilfældet $n > 2$, og antager at sætningen er sand i tilfældene op til $n-1$. Vi lader $B$ være matricen der fremkommer ved ombytning af i'te og r'te række i $A$. Vi vælger en tredje række, $k$, og udvikler efter denne. Ser vi på to cofaktorer:

$$(-1)^{k+j}|A_{kj}| \qquad \text{og} \qquad (-1)^{k+j}|B_{kj}|, \tag{8.7}$$

så har de modsat fortegn ifølge vores induktionsantagelse, da $A_{kj}$ og $B_{kj}$ er ens pånær en rækkeombytning. Da $a_{kj} = b_{kj}$ konkluderer vi at $\det(A) = -\det(B)$.

**Ens rækker** Hvis to rækker er ens, så er determinanten lig 0.

Ved ombytning af de to ens rækker i $A$, får vi en matrix $B$. Der gælder så at $\det(A) = -\det(B)$. Men da $A = B$, betyder det at $\det(A) = -\det(A)$. Derfor har vi at $\det(A) = 0$.

**Rækkeskalering** Hvis den $i$'te række i $A$ skaleres med en faktor $r$, skaleres determinantenn også med en faktor $r$.

Vi udvikler efter den $i$'te række i $B$, og får

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{i1}b'_{i1} + b_{i2}b'_{i2} + \cdots + b_{in}b'_{in} \\ &= ra_{i1}a'_{i1} + ra_{i2}a'_{i2} + \cdots + ra_{in}a'_{in} \\ &= r\det(A) \end{aligned} \tag{8.8}$$

Vi benyttede, at $b_{ij} = a_{ij}$, da minorerne er ens.

**Rækkeskalering og addition** Hvis man lægger $r$ gange den $i$'te række til den $k$'te række i $A$, ændres determinanten ikke.

For den resulterende matrix $B$ gælder så, at $b_{kj} = a_{kj} + ra_{ij}$. Vi finder determinanten af $B$ ved at udvikle efter $k$'te række:

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{k1}b'_{k1} + b_{k2}b'_{k2} + \cdots + b_{kn}b'_{kn} \\ &= (a_{k1} + ra_{i1})a'_{k1} + (a_{k2} + ra_{i2})a'_{k2} + \cdots + (a_{kn} + ra_{in})a'_{kn} \\ &= \det(A) + r(a_{i1}a'_{k1} + a_{i2}a'_{k2} + \cdots + a_{in}a'_{kn}) = \det(A) \end{aligned} \tag{8.9}$$

Vi benyttede os først af, at $b'_{kj} = a'_{kj}$. Dernæst benyttede vi at den sidste parentes var determinanten af en matrix $C$, der er fremkommet ved at sætte den $k$'te række i $A$ lig den $i$'te række. Der er således to ens rækker i $C$.

**Invertibel matrix** En matrix $A$ er invertibel hvis og kun hvis, $\det(A) \neq 0$.

Vi kan rækkereducere $A$ til REF $H$ uden at lave rækkeskalering, sådan at $\det(A) = \pm\det(H)$. $A$ er invertibel hvis og kun hvis der er en pivot i hver række, diagonalen skal altså bestå af ikke-nul indgange. Determinanten af $H$ er lig produktet af diagonalindgangene, hvilket er forskelligt fra 0 præcis når der er pivot i alle rækkerne.

## 9 Cramers regel

**Cramers regel** Løsningerne til ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor $A$ er en invertibel matrix, kan skrives som

$$x_k = \frac{\det(B_k)}{\det(A)}, \tag{9.1}$$

hvor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ og $B_k$ er matricen der fremkommer ved at man skifter den $k$'te søjlevektor i $A$ ud med $\mathbf{b}$.

Vi starter med at lade $X_k$ være følgende matrix:

$$X_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_k & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.2}$$

$X_k$ er identitetsmatricen med den k'te søjlevektor udskiftet med $\boldsymbol{x}$.

Produktet $AX_k$ giver $B_k$, hvilket giver os at

$$\det(A) \cdot \det(X_k) = \det(B_k) \tag{9.3}$$

Ved at udvikle efter den k'te række, ser vi at $\det(X_k) = x_k$. Og da $A$ er invertibel, ved vi at $\det(A) \neq 0$, sådan at $x_k = \det(B_k)/\det(A)$.

**Adjoint** ?

## 10 Egenværdier og egenvektorer

**Egenværdi, egenvektor** En skalar $\lambda$ kaldes en *egenværdi* og en vektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ kaldes en *egenvektor*, begge tilhørende en matrix $A$, hvis

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}. \tag{10.1}$$

**Karakteristisk polynomium** Ligning (10.1) kan omskrives til $(A-\lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Det er et homogent system, og et sådant har en ikke-triviel løsning præcis når $\det(A - \lambda I) = 0$. Det *karakteristiske polynomium* er $\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ og egenværdierne er rødderne i $\mathcal{P}_A$.

## 11 Cayley-Hamilton sætningen

**Cayley-Hamilton sætningen** Enhver matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$, hvor legemet $\mathbb{F}$ er enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, tilfredsstiller sig eget karakteristiske polynomium:

$$\mathcal{P}_A(A) = p_0 I + p_1 A + \cdots + p_{n-1}A^{n-1} + p_n A^n = O. \tag{11.1}$$

Vi ved, at $\mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ er et polynomium i $\lambda$ af grad $n$:

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_n\lambda^n. \tag{11.2}$$

Vi sætter så $B_\lambda = \operatorname{adj}(A - \lambda I)$. $B_\lambda$ kan så udtrykkes som et polynomie i $\lambda$ af grad $n-1$:

$$B_\lambda = \operatorname{adj}(A - \lambda I) = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-2}\lambda^{n-2} + B_{n-1}\lambda^{n-1}, \quad (11.3)$$

hvor alle $B_i$ er $n \times n$ matricer. Den højeste grad af $\lambda$ er nu $n-1$, da $B_\lambda$ består af determninanter af minorer fra $A$, der er $(n-1) \times (n-1)$ matricer.

Vi kan nu udnytte følgende identitet $M \operatorname{adj}(M) = \det(M) I$:

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)\operatorname{adj}(A - \lambda I) &= \det(A - \lambda I) I \Rightarrow \\ (A - \lambda I) B_\lambda &= \mathcal{P}_A(\lambda) I.\end{aligned} \quad (11.4)$$

Indsætter vi nu de udtryk for $\mathcal{P}_A(\lambda)$ og $B_\lambda$ vi fandt i (11.2) og (11.3) fås først $(A - \lambda I)B_\lambda$:

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)B_\lambda &= (A - \lambda I)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-2}\lambda^{n-2} + B_{n-1}\lambda^{n-1}) \\ &= AB_0 + (AB_1 - B_0)\lambda + (AB_2 - B_1)\lambda^2 + \cdots \\ &\quad + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} + (-B_{n-1})\lambda^n\end{aligned} \quad (11.5)$$

Når vi sammenligner koefficienterne i (11.5) med de tilsvarende koefficienter i $\mathcal{P}_A(\lambda) I = p_0 I + (p_1 I)\lambda + \cdots + (p_{n-1} I)\lambda^{n-1} + (p_n I)\lambda^n$, så ser vi at

$$\begin{aligned}AB_0 &= p_0 I \\ AB_1 - B_0 &= p_1 I \\ &\vdots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= p_{n-1} \\ -B_{n-1} &= p_n I\end{aligned} \quad (11.6)$$

Vi multiplicerer nu den første ligning i (11.6) med I, den anden med $A$, den tredje med $A^2$ og så videre, alt sammen fra venstre:

$$\begin{aligned}AB_0 &= p_0 I \\ A^2 B_1 - AB_0 &= p_1 A \\ &\vdots \\ A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} &= p_{n-1} A^{n-1} \\ -A^n B_{n-1} &= p_n A^n\end{aligned} \quad (11.7)$$

Vi kan nu se, at $\mathcal{P}_A(A) = O$ idet

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_A(A) &= p_0 I + p_1 A + \cdots + p_n A^n \\ &= AB_0 + (A^2 B_1 - AB_0) + \cdots + (-A^n B_n - 1) = O.\end{aligned} \quad (11.8)$$

# 12 Diagonalisering

**Egenværdier og -vektorer** Hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er skalarer, og $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ er ikke-nul vektorer, og

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{12.1}$$

så er $AC = CD$ hvis og kun hvis skalarerne er egenværdier for $A$ og vektorerne er de tilhørende egenvektorer.

Vi starter med at udregne $AC$:

$$AC = A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & \cdots & A\boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{12.2}$$

Vi udregner også CD:

$$\begin{aligned} CD &= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \lambda_2\boldsymbol{v}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12.3}$$

Vi ser altså, at $AC = CD$ hvis og kun hvis $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$, og det er jo netop sandt når $\lambda_i$ og $\boldsymbol{v}_i$ er egenværdi og egenvektor for $A$.

**Uafhængighed af egenvektorer** Hvis $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ er egenvektorer for $A$ hørende til *forskellige* egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, så er $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ uafhængige, og $A$ er diagonaliserbar.

Vi laver et modstridsbevis, hvor vi antager at $\boldsymbol{v}_k$ kan skrives som en linearkombination af $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}\}$ der så er uafhængige:

$$\boldsymbol{v}_k = d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1}. \tag{12.4}$$

Vi ganger først med $\lambda_k$:

$$\lambda_k\boldsymbol{v}_k = d_1\lambda_k\boldsymbol{v}_1 + d_2\lambda_k\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_{k-1}\lambda_k\boldsymbol{v}_{k-1}, \tag{12.5}$$

og dernæst med $A$, hvor vi husker at $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$:

$$\lambda_k \boldsymbol{v}_k = d_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_{k-1}\lambda_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1}. \tag{12.6}$$

De to ligninger trækkes nu fra hinanden, hvorved vi får en afhængighedsrelation mellem $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$:

$$0 = d_1(\lambda_1 - \lambda_k)\boldsymbol{v}_1 + d_2(\lambda_2 - \lambda_k)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\boldsymbol{v}_{k-1}. \tag{12.7}$$

Her er alle koefficienterne *ikke* lig 0: der er mindst én af $d_i$'erne der er forskellig fra nul i følge (12.4), og da alle $\lambda_i$'erne er forskellige, er parenteserne også alle forskellige fra nul. Vi har nu en modstrid, idet mængden $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}\}$ ikke er uafhængig, hvilket strider mod antagelserne. Derfor kan $\boldsymbol{v}_k$ ikke være en linearkombination af de andre $\boldsymbol{v}_i$ og egenvektorerne er således alle uafhængige.

# 13 Indre produkt

**Indre produkt** Et *indre produkt* er en operation i et vektorrum, der knytter et reelt tal til et par af vektorer. Man skriver $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ for det indre produkt mellem $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$. Et indre produkt skal opføre sig som det prikprodukt vi er vant til fra $\mathbb{R}^n$.

**Længde af en vektor** Vi definerer *længden* af en vektor som $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$.

**Cauchy-Schwarz uligheden** Lad $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$ være vektorer i $V$ hvortil der er knyttet et indre produkt. Så vil $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle| \leq \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$.

Vi starter med at se på $\|r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}\|^2$, der altid er ikke-negativ:

$$\begin{aligned}
\|r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}\|^2 &= \langle r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}, r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w} \rangle \\
&= \langle r\boldsymbol{v}, r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w} \rangle + \langle s\boldsymbol{w}, r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w} \rangle \\
&= \langle r\boldsymbol{v}, r\boldsymbol{v} \rangle + \langle r\boldsymbol{v}, s\boldsymbol{w} \rangle + \langle s\boldsymbol{w}, r\boldsymbol{v} \rangle + \langle s\boldsymbol{w}, s\boldsymbol{w} \rangle \\
&= r^2 \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle + 2rs \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle + s^2 \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle \geq 0
\end{aligned} \tag{13.1}$$

Ligning (13.1) gælder for alle vektorer og alle skalarer, specielt gælder den hvis vi sætter $r = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle$ og $s = -\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$. Vi får så

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle^2 \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle - 2 \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle^2 + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle^2 \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle = \\
&\qquad \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle^2 \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{13.2}$$

Vi sætter nu $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle$ uden for en parentes:

$$\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle \left( \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle^2 \right) \geq 0 \tag{13.3}$$

Vi går nu tilbage til Cauchy-Schwarz uligheden. Hvis $\langle w, w \rangle = 0$, så er $w = 0$, og uligheden er dermed sand.

Men hvis $\langle w, w \rangle = \|w\|^2 > 0$, så må den store parentes i ligning (13.3) være ikke-negativ, hvilket giver os at:

$$\begin{aligned} \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle^2 \geq 0 \Rightarrow \\ \|v\|^2 \|w\|^2 \geq \langle v, w \rangle^2 \Rightarrow \\ \|v\| \|w\| \geq |\langle v, w \rangle| \end{aligned} \tag{13.4}$$

**Trekantsuligheden** Vi kan nu vise trekantsuligheden: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Vi regnet på $\|v + w\|^2$:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2 \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &\geq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\| \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned} \tag{13.5}$$

Tager vi nu kvadratroden på begge sider, får vi trekantsuligheden.

**Vinkel mellem vektorer** Vi definerer *vinklen* mellem to vektorer som

$$\angle(v, w) = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}. \tag{13.6}$$

Vi ved at brøken altid vil ligge i intervallet $[-1, 1]$, da Cauchy-Schwarz uligheden siger, at $-\|v\|\|w\| \leq |\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|$.

## 14 Ortogonalt komplement og projektion

**Ortogonalt komplement** Lad $W$ være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$, der står vinkelret på alle vektorer i $W$ udgør selv et underrum af $\mathbb{R}^n$, og betegnes $W^\perp$.

Man finder $W^\perp$ ved at danne en matrix $A$, hvis rækkevektorer er frembringende vektorer for $W$. Nulrummet vil så være lig $W^\perp$.

**Egenskaber ved $W^\perp$** Det ortogonale komplement $W^\perp$ til et underrum $W$ har en række fine egenskaber:

1. Det er et underrum af $\mathbb{R}^n$, da det er lig nulrummet for en matrix.
2. Dimensionen af $W^\perp$ er $\dim\left(W^\perp\right) = n - \dim(W)$. Det følger af rangformlen, der nu lyder $\dim(W) + \dim\left(W^\perp\right) = n$.

3. Der gælder at $(W^{\perp})^{\perp} = W$. Vi anvender dimensionsformlen på underrummet $W^{\perp}$, og får:

$$\dim\left((W^{\perp})^{\perp}\right) = n - \dim\left(W^{\perp}\right) = n - (n-k) = k, \qquad (14.1)$$

hvor $k$ er dimensionen af $W$. Da alle vektorer i $W$ står vinkelret på alle vektorer i $W^{\perp}$, er $W$ er underrum af det ortogonale komplement til $W^{\perp}$, altså $\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$. Men da $\dim(W) = \dim\left((W^{\perp})^{\perp}\right)$, konkluderer vi at $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

4. Enhver vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ kan opskrives på *entydig* vis som summen af en vektor i $W$ og $W^{\perp}$: $\mathbf{b} = \mathbf{b}_W + \mathbf{b}_{W^{\perp}}$. Lad nemlig $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en basis for $W$ og $\{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en basis for $W^{\perp}$. Vi viser, at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ ved at prøve, at finde en afhængighedsrelation:

$$r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \ldots r_k\mathbf{v}_k + s_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + s_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + s_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \qquad (14.2)$$

Vi kan omskrive ligningen til

$$r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \ldots r_k\mathbf{v}_k = -s_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - s_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} - \cdots - s_n\mathbf{v}_n. \qquad (14.3)$$

Nu er venstresiden en vektor i $W$, mens højresiden er en vektor i $W^{\perp}$. Da der er lighed, ligger vektoren i $W \cap W^{\perp}$ og denne vektor står vinkelret på sig selv: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Positiviteten af det indre produkt giver os så, at $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Da $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ og $\{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er baser for $W$ og $W^{\perp}$, må alle koefficienterne være nul. Alle vektorerne er altså uafhængige, og da der er $n$ af dem, udgør de en basis for $\mathbb{R}^n$.

Vi viser, at opskrivningen er entydig. Vælg nemlig $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in W$ og $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in W^{\perp}$, sådan, at vi har en vektor i $\mathbb{R}^n$ hvis opskrivning ikke er entydig: $\mathbf{b} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$. Det medfører, at

$$W \ni \mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in W^{\perp}. \qquad (14.4)$$

Vi har nu to vektorer i $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, så $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ og $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Opskrivningen var altså entydig.

## 15 Gram-Schmidtprocessen

**Ortogonale vektorer er uafhængige** Hvis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en mængde af ortogonale ikke-nul vektorer i $\mathbb{R}^n$, så er de uafhængige.

Vi lavet et modstridsargument, idet vi antager at der er en afhængighedsrelation:

$$\mathbf{v}_j = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} \tag{15.1}$$

Vi laver nu et prikprodukt med $\mathbf{v}_j$ på begge sider. Venstresiden bliver $\|\mathbf{v}_j\|$, mens højresiden bliver 0, da $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i = 0$ for $j \neq i$. Det strider mod vores antagelser om, at $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$. Derfor er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ en uafhængige.

**Projektion med en ortogonalbasis** Lad $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ være en ortogonalbasis for $W$ og lad $\mathbf{b}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Projektionen af $\mathbf{b}$ på $W$, $\mathbf{b}_W$, er så givet ved

$$\mathbf{b}_W = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k}\mathbf{v}_k. \tag{15.2}$$

Vi ved at $\mathbf{b} = \mathbf{b}_W + \mathbf{b}_{W^\perp}$. Vi kan da opskrive $\mathbf{b}_W$ som en linearkombination af $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ med skalarer $r_1, r_1, \dots, r_k$:

$$\mathbf{b}_W = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k. \tag{15.3}$$

Vi laver nu et prikprodukt med $\mathbf{v}_i$ på begge sider af $\mathbf{b} = \mathbf{b}_W + \mathbf{b}_{W^\perp}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_i &= \mathbf{b}_W \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{b}_{W^\perp} \cdot \mathbf{v}_i \\ &= r_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i + r_2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \cdots + r_k\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_i + 0 \\ &= r_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i, \end{aligned} \tag{15.4}$$

hvilket fortæller os at $r_i = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}$, sådan at $r_i\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}\mathbf{v}_i$. Sidste ligning er netop projektionen af $\mathbf{b}$ på $\mathbf{v}_i$. Kombinerer vi det med (15.3) får vi straks (15.2).

**Ortonormal basis** Lad $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ være en basis for et underrum $W$ af $\mathbb{R}^n$. Vi kalder basen *ortonormal* hvis alle vektorerne står vinkelret på hinanden, og de alle har længden 1:

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \text{ (ortogonale vektorer) og} \\ 1 & \text{for } i = j \text{ (længden er 1).} \end{cases} \tag{15.5}$$

**Gram-Schmidt sætningen** Lad $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ være en vilkårlig basis et underrum $W$ af $\mathbb{R}^n$ og lad

$$W_j = \mathrm{sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_j) \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{15.6}$$

Sætningen siger, at der eksisterer en ortonormalbasis $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ for $W$ sådan at $W_j = \mathrm{sp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_j)$.

Vi starter med at sætte $v_1 = a_1$. For $j = 2, 3, \ldots, k$ lader vi $p_j$ være projektionen af $a_j$ på $W_{j-1} = \mathrm{sp}(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1})$, sådan at $p_j$ er projektionen af $a_j$ ned på underrummet udspændt af de foregående vektorer. Endelig sætter vi $v_j = a_j - p_j$. Vi har nu at

$$a_j = p_j + (a_j - p_j) = p_j + v_j. \tag{15.7}$$

Her ligger $p_j$ i $W_{j-1}$. Det betyder, at vi har opskrevet $a_j$ som en sum af $p_j$ i $W_{j-1}$ og $v_j$ i $(W_{j-1})^\perp$. Men da $v_j = a_j - p_j$ hvor både $a_j$ og $p_j$ ligger i $W_j$, ligger $v_j$ også i $W_j$. Vi ved nu, at $v_j$ står vinkelret på alle vektorer i $W_{j-1}$, da $v_j \in (W_{j-1})^\perp$. Mængden $\{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$ må således være en ortogonal mængde.

Ved at normalisere vektorerne $v_1, v_2, \ldots, v_j$ kan vi finde en ortonormalbasis. Gram-Schmidt formlen for $v_j$ bliver

$$v_j = a_j - \left(\frac{a_j \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{a_j \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \cdots + \frac{a_j \cdot v_{j-1}}{v_{j-1} \cdot v_{j-1}} v_{j-1}\right). \tag{15.8}$$

## 16 Ortogonale matricer

**Ortogonal matrix** En matrix $A$ er *ortogonal*, hvis og kun hvis $A^T A = I$. Det indebærer at $A^{-1} = A^T$. Søjlevektorerne i en ortogonalmatrix udgår en orthonormalbasis for $\mathbb{R}^n$, idet $a_i \cdot a_j =$ for $i \neq j$ og $\|a_i\| = 1$.

**Stabile egenskaber** Multiplikation med ortogonale matricer er en *stabil* proces, idet den bevarer prikproduktet, længder og vinkler.

Prikproduktet er bevaret, idet $x \cdot y = x^T y$:

$$(Ax) \cdot (Ay) = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay = x \cdot y \tag{16.1}$$

Længden defineres ud fra prikproduktet: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, hvilket betyder at det også er bevaret. På samme måde er vinkler også udtrykt via prikprodukter: $\angle(x, y) = \arccos \frac{x \cdot y}{\sqrt{x \cdot x}\sqrt{y \cdot y}}$ og er derfor bevaret.

**Diagonalisering af reelle symmetriske matricer** Enhver reel symmetrisk matrix kan diagonaliseres af en ortogonal matrix.

Reelle symmetriske matricer er specialtilfælde af hermitiske, se derfor sætningen hermitiske matricer på den følgende side.

## 17 Unitær diagonalisering

**Unitær matrix** En ortogonal matrix med komplekse indgange kaldes *unitær*. Søjlevektorerne en en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^n$. Unitære matricer er *normale* og opfylder at $U^* U = I$, hvilket betyder at $U^{-1} = U^*$.

**Schur's lemma** Enhver (kompleks) matrix kan bringes på øvre-triangulær form af en unitær matrix. Lad $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Så findes $U$ unitær, sådan at $U^*AU$ er øvre-triangulær.

**Spektral sætning for hermitiske matricer** Enhver hermitisk matrix er unitær diagonaliserbar.

Lad $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Så findes der (ifølge Schur's lemma) en unitær matrix $U$, sådan at $D = U^{-1}AU$ er øvre triangulær. Vi vil vise, at $D$ også er hermitisk, hvilket medfører at den er en diagonal matrix:

$$D^* = (U^{-1}AU)^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U = U^{-1}AU = D. \tag{17.1}$$

Da der er nuller under diagonalen og $D$ samtidig er lig dens egen transponerede, må der også være nuller over diagonalen. Diagonalindgangene er lig deres egen konjugerede, altså er de reelle tal. Det viser, at egenværdierne for $A$ er reelle.

**Egenværdier og -vektorer for hermitiske matricer** Egenværdierne for en hermitisk matrix $H$ er reelle, og egenvektorerne svarende til forskellige egenværdier er ortogonale. Lad $\lambda$ og $\mu$ være egenværdier med tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$ for $H$:

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}\,\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle &= \langle \lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \langle H\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = (H\boldsymbol{v})^*\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^*H^*\boldsymbol{w} \\ &= \boldsymbol{v}^*H\boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{v}, H\boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \mu\boldsymbol{w}\rangle = \mu\,\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle\,. \end{aligned}\tag{17.2}$$

Vi trækker sidste fra første led, og får at $(\overline{\lambda} - \mu)\,\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$. Hvis de to egenvektorer er ens, så står der, at $(\overline{\lambda} - \lambda)\,\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$. Men da $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor, er $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \|\boldsymbol{v}\| \neq 0$ og dermed er $\overline{\lambda} = \lambda$ — egenværdien $\lambda$ er altså reel.

Hvis $\lambda \neq \mu$, så er $\overline{\lambda} - \mu \neq 0$, da $\overline{\lambda} = \lambda$. Men så er $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$ hvilket betyder, at $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$ er ortogonale.

## 18 Matrixrepræsentationer

**Standard matrix representation** En liniær transformation $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ har en *standard matrix representation* $A$ givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\boldsymbol{e}_1) & T(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & T(\boldsymbol{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \tag{18.1}$$

Der gælder så, at $T(v) = Av$ for $v = r_1 e_1 + r_2 e_2 + \cdots + r_n e_n$:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(r_1 e_1 + r_2 e_2 + \cdots + r_n e_n) \\ &= r_1 T(e_1) + r_2 T(e_2) + \cdots + r_n T(e_n) \\ &= A[r_1, r_2, \ldots, r_n] = Av \end{aligned} \tag{18.2}$$

**Similære matricer** Hvis to matricer er similære, repræsenterer de samme liniære transformation, blot med hensyn til forskellige baser. Hvis $R_B$ og $R_{B'}$ er repræsentationer af $T$ med hensyn til baserne $B$ og $B'$, så er

$$R_{B'} = C_{B',B}^{-1} R_B C_{B',B}, \tag{18.3}$$

hvor $C_{B',B}$ er koordinatskiftematricen fra $B'$ til $B$.

## 19 Jordan kanonisk form

**Jordan blok** En *Jordan blok* er en matrix $J \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ på formen

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ \mathbf{0} & & & & \lambda \end{bmatrix}. \tag{19.1}$$

Vi ser, at $J$ kun har én egenværdi, $\lambda$, med algebraisk multiplicitet $n$.

**Egenskaber ved en Jordan blok** En $m \times m$ Jordan blok $J$ med egenværdi $\lambda$ har en række egenskaber:

1. For $1 < i \leq m$ gælder at $(J - \lambda I)e_i = e_{i-1}$, mens $(J - \lambda I)e_1 = 0$. Det skyldes, at $J - \lambda I = [0, e_1, \ldots e_{n-1}]$, sådan at den første søjle er nulvektoren, den anden søjle er den første enhedsvektor og så videre. Ganger vi med $e_i$ får vi den i'te søjle, hvor $e_{i-1}$ er. Man kan så lave en *streng* der viser effekten af $J - \lambda I$ på enhedsvektorerne:

$$J - \lambda I : e_m \to e_{m-1} \to e_{m-2} \to \cdots \to e_1 \to 0. \tag{19.2}$$

Man siger at $J - \lambda I$ *annihilerer* $e_1$ når den bliver til nulvektoren.

2. Der gælder også, at $(J - \lambda I)^m = O$ mens $(J - \lambda I)^i \neq O$ for $i < m$. Skriver vi $J'$ for $(J - \lambda I)$, da bliver $(J - \lambda I)(J - \lambda I)$:

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ 0 & J'e_1 & \cdots & J'e_{m-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ 0 & 0 & e_1 & \cdots & e_{m-2} \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}. \tag{19.3}$$

3. Endelig gælder der, at $J\boldsymbol{e}_i = \lambda\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_{i-1}$ for $1 < i \le m$, mens $J\boldsymbol{e}_1 = \lambda\boldsymbol{e}_1$.

   Det følger helt naturligt, når man ser på opbygningen af en Jordan blok i (19.1). Den i'te søjle har $\lambda$ på den i'te indgang, 1 lige over og 0 på alle andre indgange. Derfor er $J\boldsymbol{e}_i = \lambda\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_{i-1}$.

**Ydre produkt** Det *ydre produkt* af matricerne $A_1, A_2, \ldots, A_k$, der ikke behøver at have samme størrelse, er givet ved:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \begin{bmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_k \end{bmatrix}. \tag{19.4}$$

**Jordan kanonisk form** En matrix er på *Jordan kanonisk form* hvis den er et ydre produkt af Jordan blokke.