

Stødforsøg på luftpudebænk
Skrå sammenståd
Skråt kast

Martin Geisler

6. maj 2001

Kapitel 1

Stødforsøg på luftpudebænk

Afsnittene med formål, anvendt udstyr og udførelse er i så stort omfang som mulig udeladt, da det allerede findes i øvelsesvejledningerne.

1.1 Forsøgsresultater

Se tabel 1.1 hvor forsøgsresultaterne findes.

t_{A_1} [s]	t_{B_1} [s]	t_{A_2} [s]	t_{B_2} [s]	m_A [kg]	m_B [kg]
0,438	-0,335	-1,151	0,242	0,8109	0,4073
0,216	-0,253	-0,265	0,226	0,4073	0,4073
0,296	∞	0,815	0,222	0,8109	0,4073
0,057	∞	4,795	0,061	0,4073	0,4073
0,082	∞	-0,253	0,134	0,4073	0,8109
0,265	-0,227	0,881	0,881	0,8093	0,4057
0,373	-0,196	-0,904	-0,904	0,4057	0,4057
0,248	∞	0,367	0,367	0,8093	0,4057
0,15	∞	0,315	0,315	0,4057	0,4057

Tabel 1.1: Forsøgsresultaterne ved sammenstød mellem to vogne. Tiderne er regnet med fortegn, således at positive og negative tider angiver hver sin retning.

1.2 Behandling af forsøgsresultater

Ved hvert forsøg, regner vi hastighederne og impulsen ud, både før og efter sammenstøddet. Hastigheden før benævnes u_A mens hastigheden efter sammenstøddet benævnes u_A . Disse data findes i tabel 1.2 og 1.3 på næste side. Da vi selvfølgelig ikke kunne tæste ∞ ind i regnearket, har jeg sat tiden til et år, altså $3600 \cdot 24 \cdot 365 = 31536000$ s. Det vigtige er, at tiden er stor, således at den udregnede hastighed bliver næsten 0.

Som et eksempel, kan vi se på, hvordan vi regner impulsen ud før og efter

u_A [m/s]	u_B [m/s]	v_A [m/s]	v_B [m/s]
0,228	-0,299	-0,087	0,413
0,463	-0,395	-0,377	0,442
0,338	0	0,123	0,450
1,754	0	0,021	1,639
1,220	0	-0,395	0,746
0,377	-0,441	0,114	0,114
0,268	-0,510	-0,111	-0,111
0,403	0	0,272	0,272
0,667	0	0,317	0,317

Tabel 1.2: Hastigheder beregnet ud fra forsøgsresultaterne.

p_1 [kgm/s]	p_2 [kgm/s]	$\frac{\Delta p}{ p_{A1} + p_{B1} }$	W_{k1} [J]	W_{k2} [J]	$\frac{W_{k2}-W_{k1}}{W_{k1}}$
0,064	0,098	11,18%	0,039	0,038	-3,68%
0,028	0,027	-0,30%	0,075	0,069	-8,74%
0,274	0,283	3,29%	0,046	0,047	2,49%
0,715	0,676	-5,37%	0,627	0,547	-12,67%
0,497	0,444	-10,58%	0,303	0,258	-14,94%
0,127	0,138	2,32%	0,097	0,008	-91,93%
-0,098	-0,090	2,68%	0,067	0,005	-92,63%
0,326	0,331	1,45%	0,066	0,045	-31,45%
0,270	0,258	-4,76%	0,090	0,041	-54,65%

Tabel 1.3: Impulser og kinetiske energier beregnet ud fra forsøgsresultaterne.

ved det første forsøg. Først finder vi hastigheden før og efter sammenstøddet:

$$\begin{aligned}
 u_A &= \frac{0,1 \text{ m}}{t_{A1}} = \frac{0,1 \text{ m}}{0,438 \text{ s}} = 0,228 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 u_B &= \frac{0,1 \text{ m}}{t_{B1}} = \frac{0,1 \text{ m}}{-0,335 \text{ s}} = -0,299 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 v_A &= \frac{0,1 \text{ m}}{t_{A2}} = \frac{0,1 \text{ m}}{-1,151 \text{ s}} = -0,087 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 v_B &= \frac{0,1 \text{ m}}{t_{B2}} = \frac{0,1 \text{ m}}{-0,242 \text{ s}} = 0,413 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Vi kan nu udregne impulsen før og efter:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= m_A u_A + m_B u_B \\
 &= 0,8109 \text{ kg} \cdot 0,228 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,4073 \text{ kg} \cdot -0,299 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 &= 0,064 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \\
 p_2 &= m_A v_A + m_B v_B \\
 &= 0,8109 \text{ kg} \cdot -0,087 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,4073 \text{ kg} \cdot 0,413 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 &= 0,098 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Som omtalt i øvelsesvejledningen, vil vi angive afvigelsen i forhold til $|p_{A_1}| + |p_{B_1}|$, da p_1 jo kan risikere at være tæt på nul:

$$\begin{aligned} \frac{p_2 - p_1}{|p_{A_1}| + |p_{B_1}|} &= \frac{p_2 - p_1}{m_A |u_A| + m_B |u_B|} \\ &= \frac{0,098 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}} - 0,064 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}}{0,8109 \text{ kg} \cdot |0,228 \frac{\text{m}}{\text{s}}| + 0,4073 \text{ kg} \cdot |-0,299 \frac{\text{m}}{\text{s}}|} \quad (1.3) \\ &= 11,18\% \end{aligned}$$

Vi ser i tabel 1.3 på forrige side, at impulsen før og efter er tæt på at være ens, i næsten alle tilfælde. Afvigelserne ligger på omkring et par procent.

Den kinetiske energi før og efter sammenstøddet er udregnet efter samme princip. Her er afvigelsen dog udregnet på "normal" vis, altså som $\frac{W_{k_2} - W_{k_1}}{W_{k_1}}$, da vi her ikke får problemet med at W_{k_1} kan gå hen og blive nul.

Det ses i tabel 1.3 på foregående side at den kinetiske energi er nogenlunde bevaret så længe vi arbejder med elastiske stød. Det ville vi også forvente, da den potentielle energi ikke skulle være ændret.

Men når vi ser på uelastik stød, så er der ikke længere en pæn sammenhæng. Det er også forventeligt, da det kræver energi at klistre de to burrebuffere sammen. Bufferne virker som en støddæmper, og derfor har vognene en mindre hastighed efter stødet. At hastigheden er mindre, passer fint med, at alle afvigelserne også er negative.

1.3 Fejldiskussion

Vi må gå ud fra, at vognene har bevæget sig praktisk talt friktionsløst på luftpudebænken. Det viser vores tal også, da de passer fint med teorien.

En mulig fejlkilde, kunne være det, at vognene kan stille sig lidt på skrå. Derved vil de skrabe mod siderne, og altså blive bremset. Men da vores tal som sagt passer fint, ser det ikke ud til at det har spillet nogen rolle.

1.4 Konklusion

Det lykkedes os at vise, at impulsen er bevarret ved stød, både elastiske og uelastiske stød.

Vi så også, at den kinetiske energi er bevaret i nogen grad, så længe vi snakker om elastiske stød. Ved det uelastiske stød forsvandt der en del energi i sammenstøddet.

Kapitel 2

Skrå sammenstød

2.1 Formål

Vi vil vise, at der gælder impulsbevarelse, således at impulsen er den samme både før og efter sammenstøddet mellem de to kugler.

2.2 Forsøgsresultater

Se tabel 2.1 og 2.2, hvor forsøgsresultaterne findes.

Forsøg	x_1 [cm]	y_1 [cm]	x_2 [cm]	y_2 [cm]
α : Stål-stål	5,3	-8,2	33,2	7,1
β : Stål-glas	24,1	6,3	41,3	-21
γ : Stål-glas	21,2	-4,1	52,4	11,4
Stål alene	36,5	0	-	-

Tabel 2.1: Resultaterne fra tre sammenstød.

Kugle	Masse [g]
$m_{\text{stål}}$	28,23
m_{glas}	8,32

Tabel 2.2: Masserne af de to slags kugler som blev brugt i forsøget.

2.3 Behandling af forsøgsresultater

2.3.1 Impulsbevarelse

Vi behøver ikke at bruge masserne i vores beregninger, da de i tilfældet med to stålkugler går ud med hinanden:

$$\begin{aligned} p_{\text{før}} &= p_{\text{efter}} \Leftrightarrow \\ m_{\text{stål}}v_{1\text{før}} + m_{\text{stål}}v_{2\text{før}} &= m_{\text{stål}}v_{1\text{efter}} + m_{\text{stål}}v_{2\text{efter}} \Leftrightarrow \\ v_{1\text{før}} + v_{2\text{før}} &= v_{1\text{efter}} + v_{2\text{efter}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Når den ene kugle er lavet af glas, ganger vi blot dennes vektor med tallet

$$\frac{m_{\text{glas}}}{m_{\text{stål}}} = \frac{8,32 \text{ g}}{28,23 \text{ g}} = 0,295 \quad (2.2)$$

Derved kompenserer vi for glaskuglens mindre masse, og kan benytte samme beregninger som ved stålkuglerne.

Impulsen før sammenstøddet er den samme i alle tre forsøg, da det er samme stålkugle som rammer en stillestående kugle. Stålkuglen fløj 36,5 cm da den ikke ramte nogen kugle. Vi har altså en vektor for vores impuls på $p_{\text{før}} = \begin{pmatrix} 36,5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I første forsøg (α), har vi denne impuls efter sammenstøddet:

$$p_{\text{efter}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,3 \\ -8,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33,2 \\ 7,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38,5 \\ -1,1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Der er altså en lille forskel i forhold til impulsen før:

$$\begin{pmatrix} 36,5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 38,5 \\ -1,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1,1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Finder vi længden af forskellen, ved vi hvor langt kuglerne ramte ved siden af, når man lægger deres bevægelser sammen:

$$\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1,1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 1,1^2} = 2,28 \text{ cm} \quad (2.5)$$

Set i forhold til impulsen før, giver det og en fejlprocent på:

$$\frac{2,28}{\left| \begin{pmatrix} 36,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = 6,3\% \quad (2.6)$$

På samme måde kan vi udregne impulsen efter sammenstøddet mellem stål- og glaskuglen, (β):

$$p_{\text{efter}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{m_{\text{glas}}}{m_{\text{stål}}} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24,1 \\ 6,3 \end{pmatrix} + \frac{8,32 \text{ g}}{28,23 \text{ g}} \begin{pmatrix} 41,3 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36,3 \\ 0,1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Vi kan så regne fejlen ud, efter at vi har fundet længden:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 36,5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 36,3 \\ 0,1 \end{pmatrix} \right| &= \sqrt{(36,5 - 36,3)^2 + (0 - 0,1)^2} = 0,25 \text{ cm} \\ \text{Afvigelse} &= \frac{0,25 \text{ cm}}{36,5 \text{ cm}} = 0,7\% \end{aligned} \quad (2.8)$$

På tilsvarende måde finder vi afvigelsen til at være 2.1% i γ .

Vinklerne mellem kuglerne kan også beregnes, ud fra elementær trekantsbetragtning:

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{|y_1|}{x_1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{|y_2|}{x_2} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{|-8,2 \text{ cm}|}{5,3 \text{ cm}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{|7,1 \text{ cm}|}{33,2 \text{ cm}} \right) = 69^\circ\end{aligned}\quad (2.9)$$

Vi deler vinklen op i to halvdele, og regner så hver del ud for sig. I begge tilfælde benytter vi, at vi kender tangens i kraft af koordinaterne. På samme måde finder vi vinklerne i de to andre tilfælde:

$$\begin{aligned}\beta &= \tan^{-1} \left(\frac{|6,3 \text{ cm}|}{24,1 \text{ cm}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{|-21 \text{ cm}|}{41,3 \text{ cm}} \right) = 42^\circ \\ \gamma &= \tan^{-1} \left(\frac{|-4,1 \text{ cm}|}{21,2 \text{ cm}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{|11,4 \text{ cm}|}{52,4 \text{ cm}} \right) = 23^\circ\end{aligned}\quad (2.10)$$

Ud fra disse målinger, kan vi ikke bekræfte, at vinklen mellem kuglerne skulle være 90° , når masserne er ens. Det er selvfølgelig kun α som tæller her, da der i både β og γ blev brugt to forskellige slags kugler.

2.3.2 Mekanisk energi

Vi vil nu vise, at den mekaniske energi var konstant under bevægelsen. Vi ser på stålkuglen alene. Først beregner vi kuglens hastighed ved foden af rampen, idet vi målte bordhøjden til at være 0,857 m:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,857 \text{ m}}{9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0,42 \text{ s}\quad (2.11)$$

Da kuglen bevægede sig 0,365 m frem på 0,42 s, må den have bevæget sig med $\frac{0,365 \text{ m}}{0,42 \text{ s}} = 0,87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ved foden af rampen.

Vi ser så bort fra luftmodstanden, idet vi regner med at farten har været konstant hele tiden, mens kuglen bevægede sig igennem luften.

Ved foden af rampen, består kuglens mekaniske energi dels af kinetisk energi, og rotationsenergi. Ved toppen bestod den udelukkende af potentiel energi.

Sætter vi vores nulpunkt for den potentielle energi ved rampens fod, vil den potentielle energi på toppen være $E_{\text{pot}} = mgh$. Rampen er 0,085 m høj, hvilket giver en potentiel energi på

$$E_{\text{pot}} = 0,02823 \text{ kg} \cdot 0,085 \text{ m} \cdot 9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,0236 \text{ J}\quad (2.12)$$

Ved foden havde kuglen en hastighed på $0,87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, det giver en kinetisk energi på

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0,02823 \text{ kg} \cdot (0,87 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 0,0107 \text{ J}\quad (2.13)$$

Vi kan beregne rotationsenergien således:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{5}mv^2 = \frac{1}{5} \cdot 0,02823 \text{ kg} \cdot (0,87 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 0,0043 \text{ J}\quad (2.14)$$

Tilsammen giver det en mekanisk energi på $0,0107 \text{ J} + 0,00427 \text{ J} = 0,0150 \text{ J}$ ved foden af rampen, mod 0,0236 J på toppen. Der mangler altså omkring en tredjedel af den mekaniske energi.

2.4 Fejldiskussion

Vi så bort fra kuglernes udstrækning i dette forsøg, og det kan fint forklare de små unøjagtigheder vi så. Men generelt må vi sige, at kuglerne ramte meget præcist, og at resultaterne ligger meget tæt på det vi forventede.

Dog kunne vi ikke bekræfte at vinklen var 90° . Men fejlen kan måske forklares hvis man tager hensyn til, at kuglerne mistede noget kinetisk energi ved nedslaget, da der blev produceret varme og lyd.

At vi manglede en tredjedel af den mekaniske energi ved foden af rampen, kan måske forklares ved tab på grund af gnidning og varme. Vi så også bort fra f.eks. luftmodstanden. Nok stemmer resultatet ikke helt, men det er på den anden side heller ikke 10 eller 100 gange for stort/småt.

2.5 Konklusion

Vi har vist, at kuglernes impuls tilsammen er konstant.

Som allerede nævnt, kunne vi ikke eftervise, at vinklen skulle blive 90° mellem kuglerne efter sammenstøddet. Vores vinkel på 70° er dog i nærheden. Hvis man lavede nogle flere og mere nøjagtige forsøg, ville man sikkert have bedre held med at eftervise teorien.

Også i forbindelse med den mekaniske energi, fik vi lidt problemer. Jeg tror at vi skal nøjes med at konstatere, at vores resultatet også der ligger i nærheden af det forventede.

Kapitel 3

Skråt kast

3.1 Formål

Vi vil gerne eftervise de teoretisk udledte formler for kastevide og stidhøjde:

$$x_{\max} = v_0^2 \frac{\sin(2\alpha)}{g} \quad \text{og} \quad y_{\max} = v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{2g} \quad (3.1)$$

hvor v_0 er starthastigheden og α er kastevinklen.

Dernæst vil vi eftervise uafhængighedsprincippet og at banen danner en parabel.

3.2 Teoriafsnit

Der er i øvelsesvejledningen gjort rede for, at den resulterende bevægelse kan skrives således:

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \cdot t \\ v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Vi kan så finde hastigheden ved differentiation af (3.2):

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha - gt) \quad (3.3)$$

3.3 Forsøgsresultater

Se tabel 3.1 og 3.2 på næste side.

3.4 Behandling af forsøgsresultater

Vi vil først vise at kuglens bane skal danne en parabel, ved at omskrive (3.2). (3.2) giver os to ligninger for x og y :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

x [m]	y_{eksp} [m]	y_{teo} [m]	Afvigelse
0,27	0,24	0,25	5,0%
0,44	0,33	0,39	16,3%
0,72	0,56	0,60	6,2%
1,04	0,73	0,78	6,9%
1,26	0,83	0,88	6,1%
1,61	0,93	1,00	6,6%
1,97	1,03	1,05	1,9%
2,11	1,01	1,06	4,3%
2,26	1,01	1,05	3,8%
2,65	0,94	0,99	4,6%
2,90	0,86	0,91	5,2%
3,15	0,805	0,80	-0,8%
3,40	0,63	0,66	4,6%
3,70	0,41	0,46	10,1%
4,00	0,135	0,21	35,3%
4,22	-0,09	0	-

Tabel 3.1: Målinger foretaget ved en vinkel på 45° .

x (m)	y_{eksp} (m)	y_{teo} (m)	Afvigelse
0,31	0,43	0,50	12,5%
0,60	0,73	0,87	16,0%
0,90	1,13	1,17	3,8%
1,20	1,33	1,40	4,7%
1,50	1,51	1,53	1,4%
1,80	1,60	1,58	-1,1%
1,95	1,59	1,58	-0,9%
2,10	1,58	1,55	-2,1%
2,30	1,50	1,48	-1,6%
2,50	1,37	1,37	-0,1%
2,70	1,24	1,22	-1,5%
3,00	1,13	0,93	-21,4%
3,30	0,54	0,56	2,6%
3,60	0,11	0,09	-18,0%
3,90	-0,25	-0,45	44,9%

Tabel 3.2: Målinger foretaget ved en vinkel på 60° .

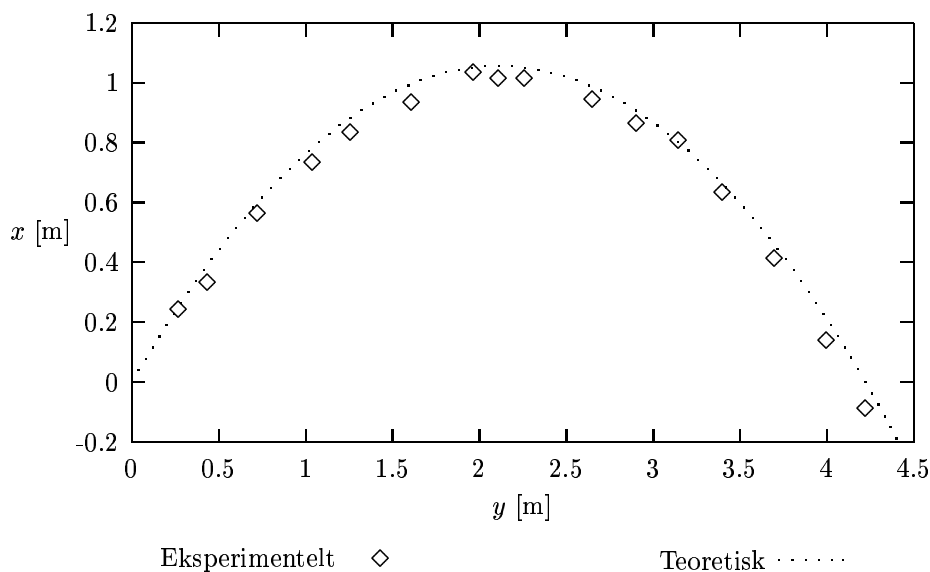
Hvis vi isolerer t i ligningen for $x(t)$ får vi $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$, hvilket indsættes i ligningen for $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{xv_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \\ y(t) &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 + \tan \alpha \cdot x \end{aligned} \quad (3.5)$$

Vi målte kastevidden til 4,22 m. Dette kan vi bruge til at udregne starthastigheden, v_0 :

$$\begin{aligned} x_{\max} &= v_0^2 \frac{\sin(2\alpha)}{g} \Leftrightarrow \\ v_0 &= \sqrt{\frac{g \cdot x_{\max}}{\sin(2\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4,22 \text{ m}}{\sin(2 \cdot 45^\circ)}} = 6,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

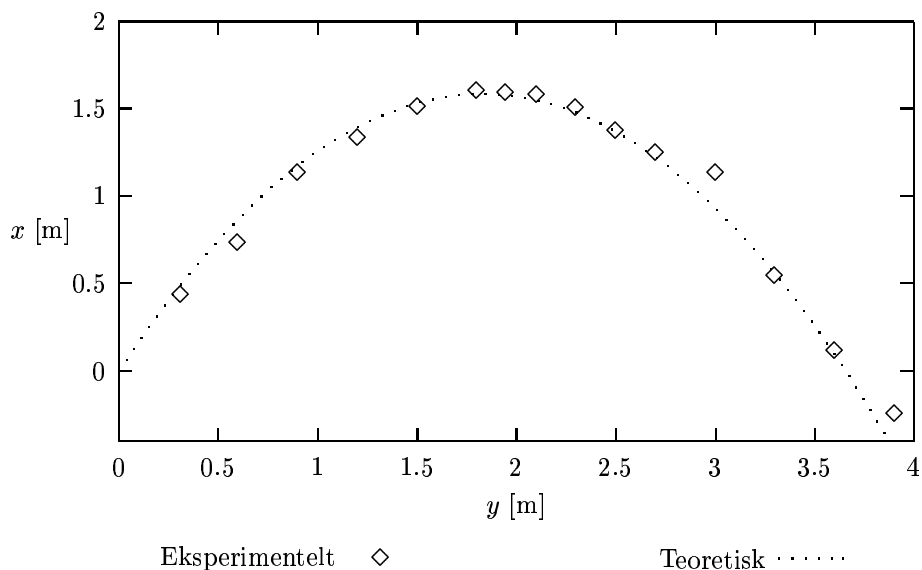
Nu da vi kender starthastigheden, kan vi beregne kuglens bane teoretisk. Dette er gjort på figur 3.1 og 3.2 på den følgende side.



Figur 3.1: Målepunkterne fra forsøget ved 45° , med den teoretiske banekurve indtegnet.

Vi ser, at punkterne ligger meget tæt op ad den teoretisk beregnede parabel. Det samme ses i tabel 3.1 og 3.2 på foregående side. De teoretiske banekurver har ligningerne:

Afvigelserne ligger på omkring 5%. Der er dog større afvigelser når vi kommer helt ud til x_{\max} , da den teoretiske højde her nærmer sig 0. Vi deler netop med denne højde for at finde afvigelsen, og da kanonen ramte indenfor et par



Figur 3.2: Målepunkterne fra forsøget ved 60° , med den teoretiske banekurve indtegnet.

centimeter, så giver det umiddelbart nogle store afvigelser. Men det drejer sig altså næsten hele tiden om få centimeter.

3.5 Fejldiskussion

Vi har gjort den antagelse, at starthastigheden er den samme ved begge vinkler. I virkeligheden er det ikke sådan. Ved 60° er fjederkraftens komponent i tyngdekraftens retning større end ved 45° . Det gør at den samlede kraft på kuglen mindskes, og kuglen får derved også en mindre starthastighed, når kanonen sigter mere op i luften.

Jeg synes ikke at man kan se, at det skulle have påvirket forsøget. Vi så, hvordan kanonen ikke kunne ramme samme punkt to gange i træk. Den ramte konsekvent plus/minus et par centimeter. Som allerede forklaret i forbindelse med behandlingen af forsøgsresultaterne, så kan det fint forklare de små afvigelser vi ser på banekurven.

3.6 Konklusion

Vi har afprøvet vores teori om kræfternes uafhængighed, ved at udføre to forsøg, som begge passede glimrende med teorien. Vi så hvordan den beregnede kurve lå oven målepunkterne.