Kapacitans

Martin Geisler

6. maj 2001

1 Formål

Vi vil gerne illustrere nogle fundamentale regler om kapacitansens afhængighed af pladeafstand og pladeareal for en pladekapacitor. Vi vil også undersøge regler for kobling af kapacitans.

Vi undersøger også hvordan spændingsfaldet over en kapacitor ændrer sig som funktion af tiden ved afladning gennem en resistor. Til slut vil vi prøve at måle på en simpel hjemmelavet kapacitor.

2 Teoriafsnit

I forsøget med pladekapacitoren prøver vi at eftervise, at kapacitansen af en pladekapacitor med pladearealet A og afstanden d mellem pladerne er givet ved:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{1}$$

I forsøget med kobling af kapacitans forventer vi at erstatningskapacitansen, C, er givet ved

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2} \tag{2}$$

for en seriekobling og givet ved

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \tag{3}$$

for en parallelkobling.

Ved afladning af en kapacitor, forventer vi at spændingsfaldet som funktion af tiden kan skrives som

$$U_C = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC} t} \qquad \text{og} \qquad T_{\frac{1}{2}} = RC \ln 2 \tag{4}$$

3 Udførelse

Se øvelsesvejledning.

4 Forsøgsresultater

Resultaterne findes i tabellerne 1–4 på side på den følgende side.

		Ledninger langs stænger	
Udbredt	Snoede	Adskilte	Rører hinanden
84 pF	99 pF	21 pF	35 pF

Tabel 1: Kapacitansen overfor omgivelserne.

	Luftmellemrum				Plast
d [mm]	2,50	1,61	0,89	2,0	2,0
C_1 [pF]	255	388	646	277	535
C_2 [pF]	163	178	302	133	229

Tabel 2: Kapacitan af pladekapacitor.

	Beregnet/aflæst [µF]	Målt [µF]
C_1	0,10	0,1041
C_2	0,022	0,02368
Seriekobling	0,018	0,01931
Parallelkobling	0,122	0,1280

Tabel 3: Kobling af kapacitanser.

U_C [V]	10	9	8	7	6	5	4
t [sek]	0	21	53	100	167	258	399

Tabel 4: Afladning af kapacitorer.

5 Behandling af forsøgsresultater

5.1 Kapacitans overfor omgivelserne

Det ses i tabel 1 på foregående side at kapacitansen stiger, når vi snoer ledningerne tæt sammen. Det passer fint med det forventede, idet ledningerne påvirker hinanden når de er snoede, således at ladningen i den negative ledninge vil tiltrække ladning i den positive. Resultatet bliver, at der samlet flyder mere ladning ud af vores multimeter, som derfor rapporterer en større kapacitans.

Når vi lægger ledningerne op af metalstænger, sker der det, at ledningerne forskyder de frie elektroner i stængerne. Når vi så lader metalstængerne røre hinanden, skaber i næsten et kredsløb, forstået på den måde, at elektronerne nu kan bevæge sig fra den metalstang som ligger op af den negative ledning, hen til den anden metalstang, og altså nærme sig den positive ledning.

Det bevirker at der hives flere elektroner ud af multimeteret, så vi måler en større kapacitans.

Der er dog en mærkelig ting ved forsøget, idet kapacitansen faldt, da vi lagde metalstænger ved siden af ledningerne. Først var kapacitansen 84 pF, mens den kun er 21 pF når der ligger metalstænger ved siden af. Vi forventede at kapacitansen ville stige når vi lagde ledningerne ved siden af stængerne, da disse indeholder frie elektroner, som så ville blive forskudt hen imod den positive ledning, og væk fra den negative. Denne forskydning skulle så betyde at den negative ledning kom til at ligge op ad den positive side af stangen — igen bliver resultatet at der flyder mere ladning ud i ledningerne, hvilket giver en større kapacitans.

Men det kunne vi altså ikke observere i vores forsøg.

5.2 Kapacitans af en pladekapacitor

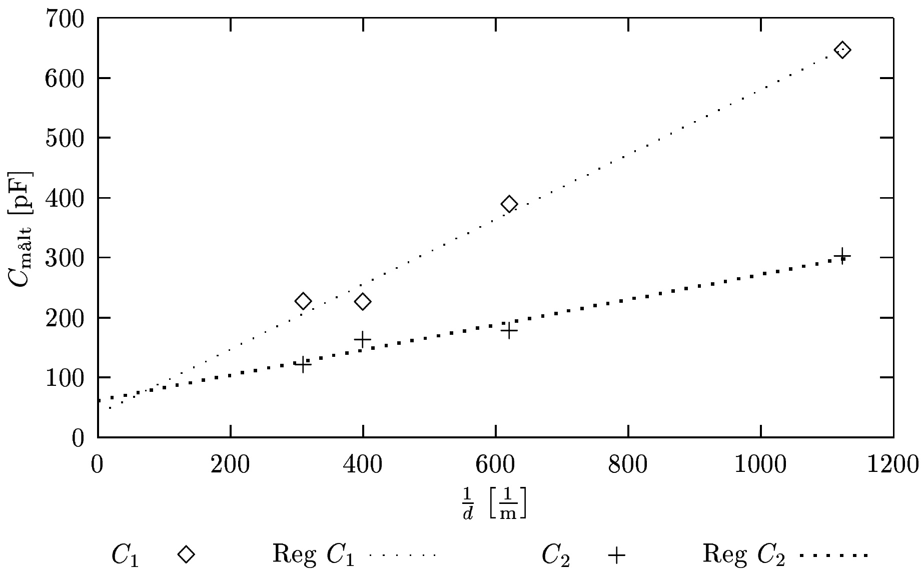
Vi beregner først pladearealerne. Vi målte diameteren til at være 0,262 m for C_1 og 0,177 m for C_2. Det giver arealerne $A_1 = 0{,}0539\ \mathrm{m}^2$ og $A_2 = 0{,}0246\ \mathrm{m}^2$.

Vi kan så afsætte $C_{\text{målt}}$ som funktion af $\frac{1}{d}$ i et koordinatsystem. Der skulle så gerne fremkomme to rette linier med hældningen $\epsilon_0 A$, se formel 1 på side 1. Skæringen med y-aksen, C_0 angiver kapacitansen når $\frac{1}{d} = 0$, hvilket selvfølgelig aldrig kan finde sted. Vi må derfor tolke det som kapacitansen når afstanden mellem pladerne er uendelig stor. Det må være det samme som kapacitansen overfor omgivelserne.

Som det ses på figur 1 på næste side, så ligger de fire målinger med luftmellemrum rimeligt pænt på linie. Ligningerne for de to bedste rette linier er:

$$\begin{aligned} C_1 &= 5{,}4123 \cdot 10^{-13}\ \ \mathrm{Fm} \cdot \tfrac{1}{d} + 3{,}9283 \cdot 10^{-11}\ \ \mathrm{F} \\ C_2 &= 2{,}0976 \cdot 10^{-13}\ \ \mathrm{Fm} \cdot \tfrac{1}{d} + 6{,}2497 \cdot 10^{-11}\ \ \mathrm{F} \end{aligned} \tag{5}$$

Ser vi nu på hældningen, kan vi finde ϵ_0 i de to tilfælde ved at dividere med



Figur 1: Kapacitansen afsat som funktion af den reciprokke afstand mellem pladerne.

arealet:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{0_1} A_1 &= 5{,}4123 \cdot 10^{-13}\ \text{Fm} \Leftrightarrow \\
\epsilon_{0_1} &= \frac{5{,}4123 \cdot 10^{-13}\ \text{Fm}}{0{,}0539\ \text{m}^2} = 10{,}0 \cdot 10^{-12}\ \tfrac{\text{F}}{\text{m}} \\
\epsilon_{0_2} A_2 &= 2{,}0976 \cdot 10^{-13}\ \text{Fm} \Leftrightarrow \\
\epsilon_{0_2} &= \frac{2{,}0976 \cdot 10^{-13}\ \text{Fm}}{0{,}0246\ \text{m}^2} = 8{,}52 \cdot 10^{-12}\ \tfrac{\text{F}}{\text{m}}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Da tabelværdien for ϵ_0 er lig $8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{F}}{\text{m}}$ afviger vores tal med henholdsvis 13% og −3,7%. Forsøget passede altså meget fint med teorien. Hvis man ser nærmere efter på figur 1, ser man også at punkterne ligger pænere på linie i anden måleserie (C_2), som så også lå tættere på tabelværdien end C_1.

Vi vil nu forsøge at finde en værdi for den relative permittivitet af plastpladen, vi brugte i forsøget. Det kan vi gøre, da vi kender arealet af kapacitorens ene plade, kapacitansen og endelig adskillelsen:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \epsilon_0 \epsilon_{r_1} \frac{A_1}{d} \Leftrightarrow \\
\epsilon_{r_1} &= \frac{C_1 d}{\epsilon_0 A_1} \Leftrightarrow \\
&= \frac{535\ \text{pF} \cdot 0{,}002\ \text{m}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 0{,}0539\ \text{m}^2} = 2{,}24\ \tfrac{\text{F}}{\text{m}}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Vi kan også finde ϵ_{r_2} på denne måde:

$$\begin{aligned} C_2 &= \epsilon_0 \epsilon_{r_2} \frac{A_2}{d} \Leftrightarrow \\ \epsilon_{r_2} &= \frac{C_2 d}{\epsilon_0 A_2} \Leftrightarrow \\ &= \frac{229 \text{ pF} \cdot 0{,}002 \text{ m}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \, \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 0{,}0246 \text{ m}^2} = 2{,}10 \, \frac{\text{F}}{\text{m}} \end{aligned} \tag{8}$$

Da det var den samme plastplade vi brugte begge gange, skulle de to værdier også gerne være ens — det er de også næsten. Ifølge databogen skulle plexiglas have en relativ permittivitet på omkring 3 $\frac{\text{F}}{\text{m}}$, så vores tal ligger tæt på tabelværdien.

5.3 Kobling af kapacitorer

Ved at sammenholde de målte værdier med de aflæste, ser vi at kapacitorerne holder sig pænt i nærheden af de opgivne kapacitanser. Den første kapacitor ligger 4,1% over det angivne, mens den anden ligger 7,6% over.

Ser vi på en seriekobling, kan vi beregne erstatningskapacitansen således:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}10 \text{ µF}} + \frac{1}{0{,}022 \text{ µF}}} = 0{,}018 \text{ µF} \tag{9}$$

Vi målte en erstatningskapacitans på 0,01931 µF, hvilket giver en afvigelse på 7%.

Det er endnu nemmere at beregne erstatningskapacitansen for en parallelkobling:

$$C = C_1 + C_2 = 0{,}10 \text{ µF} + 0{,}022 \text{ µF} = 0{,}122 \text{ µF} \tag{10}$$

Her målte vi en erstatningskapacitans på 0,1280 µF — afvigelsen er på 5%.

Hvis vi havde beregnet afvigelserne i forhold til de målinger vi har af kapacitanserne alene, forsvinder afvigelserne totalt. Da kapacitorer ligesom resistorer ikke er lavet 100% nøjagtigt fra fabrikkens side (hvis de var, ville man jo ikke angive en usikkerhed), bør vi nok gå ud fra at vores målinger af C_1 og C_2 er de korrekte, og så finde afvigelserne for serie- og parallelkoblingen ud fra disse målinger.

Gør vi det, ser tingene således ud, først for en seriekobling:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}1041 \text{ µF}} + \frac{1}{0{,}02368 \text{ µF}}} = 0{,}01929 \text{ µF} \tag{11}$$

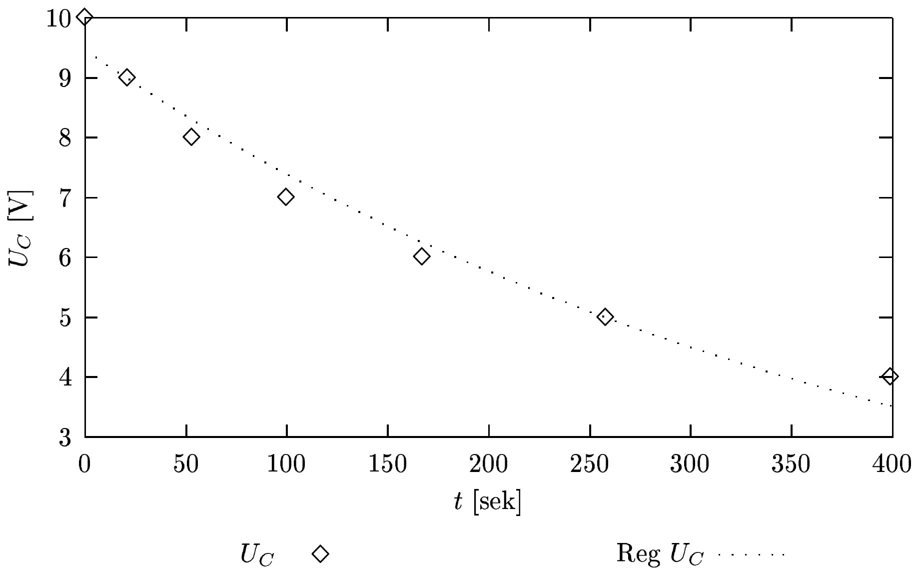
hvilket giver en fejl på kun 0,1% og sådan her for en parallelkobling

$$C = C_1 + C_2 = 0{,}1041 \text{ µF} + 0{,}02368 \text{ µF} = 0{,}1278 \text{ µF} \tag{12}$$

hvor fejlen så kun er 0,2%.

5.4 Afladning af en kapacitor

Da vi afladte kapacitoren, ledte vi strømmen igennem voltmeteret, som har en resistans på $R = 10$ MΩ. Vi forventer at få en ret linie i et semilogaritmisk



Figur 2: Spændingsfaldet over kapacitoren afsat som funktion af tiden.

koordinatsystem, hvis vi afsætter spændingsfaldet over kapacitoren, U_C, som funktion af tiden, t. Dette er gjort på figur 2.

Ligningen for linien igennem punkterne er

$$U_C = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t} = 9{,}46374 \text{ V} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{279{,}7 \text{ sek}}t} \tag{13}$$

Vi fandt altså at $U_0 = 9{,}46374$ V og $T_{\frac{1}{2}} = 279{,}7$ sek. Disse tal skal sammenholdes med de forventede værdier — vi forventede $U_0 = 10$ V og $T_{\frac{1}{2}} = RC \ln 2 = 10\ \text{M}\Omega \cdot 40\ \mu\text{F} \cdot \ln 2 = 277{,}3$ sek, da vi brugte en 40 µF kapacitor til forsøget.

Vores værdi for U_0 afviger -5% og værdien for $T_{\frac{1}{2}}$ afviger 0,7%. Alt i alt må vi sige at også dette forsøg stemte meget fint overens med teorien.

5.5 Hjemmelavet kapacitor

Vi målte en kapacitans på 24,33 nF for vores hjemmelavede kapacitor. Hvis vi antager at $\epsilon_0 = 1{,}5$ og kender arealet af den ene plade i kapacitoren $A = 18{,}5\ \text{cm} \cdot 25{,}8\ \text{cm} = 477{,}3\ \text{cm}^2 = 0{,}04773\ \text{m}^2$, kan vi finde afstanden mellem pladerne således:

$$\begin{aligned} C &= \epsilon \frac{A}{d} \Leftrightarrow \\ d &= \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{C} \\ &= 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \tfrac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 2{,}5\ \tfrac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{0{,}04773\ \text{m}^2}{24{,}33 \cdot 10^{-9}\ \text{F}} = 0{,}043\ \text{mm} \end{aligned} \tag{14}$$

Et enkelt ark papir skulle altså være omkring 0,043 mm tykt — det betyder at der kan presses 23 ark sammen på 1 mm. Det kan der ikke, hvilket må betyde at enten er den relative permittivitet for lille (en værdi på 5 $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ får tingene til at passe) eller også har vi målt kapacitansen forkert, eller også er der sket lidt af begge dele.

6 Fejldiskussion

I det første forsøg, kunne vi ikke forklare at kapacitansen faldt, når vi lagde metalstænger opad ledningerne.

Det andet forsøg passede derimod meget fint med teorien, både da vi skulle finde ϵ_0 og da vi skulle finde ϵ_r.

Koblingen af kapacitorerne var nok det forsøg som stemte bedst overens med teorien. Der var praktisk talt ikke nogen afvigelse overhoved.

Da vi af så på afladningen af en kapacitor, kunne vi tegne en eksponentielt aftagende kurve igennem målepunkterne. Kurven passede dog ikke perfekt — det første og sidste målepunkt ligger noget over kurven. Men vores halveringstid passede alligevel meget fint.

I forsøget med vores hjemmelavede kapacitor, regnede vi os frem til at der skulle kunne være omkring 23 ark papir på 1 mm. Det er lige i overkanten, men som allerede nævnt, kan det skyldes at den relative permittivitet for papiret var endnu større end den jeg brugte, eller at vi ikke fik målt kapacitansen nøjagtigt.

Især det sidste er nok den mest sandsynlige mulighed, da sølvpapiret gik itu da vi prøve at sætte krokodillenæbene fast på det. Generelt kunne vi se, at kapacitansen svingede en del op og ned når vi målte på tingene — måske skyldes det de underlige stik på multimeteret...

7 Konklusion

Vi fik eftervist de grundlæggende love omkring kapacitorer. Vi viste at kapacitansen af en pladekapacitor er givet ved

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \tag{15}$$

Vi viste også at kredsløb med kapacitorer opfører sig “omvendt” af hvordan resistorer opfører sig. Til slut viste vi at spændingen over en kapacitor man beskrives ved

$$U_C = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t} \tag{16}$$

når strømmen ledes igennem en modstand på R og kapacitoren har kapacitansen C. Halveringstiden, $T_{\frac{1}{2}}$ kan så findes ud fra ligningen.