

Fjedersvingninger  
&  
Matematisk pendul

Martin Geisler

6. maj 2001

# Indhold

<b>1</b>	<b>Fjedersvingninger</b>	<b>2</b>
1.1	Formål . . . . .	2
1.2	Apparatur . . . . .	2
1.3	Teoriafsnit . . . . .	2
1.3.1	Hooke's lov . . . . .	2
1.3.2	Parallelkobling . . . . .	3
1.3.3	Seriekobling . . . . .	3
1.3.4	Svingningstider . . . . .	4
1.4	Udførelse . . . . .	4
1.4.1	Bestemmelse af fjederkonstanter . . . . .	4
1.4.2	Bestemmelse af svingningstider . . . . .	5
1.5	Forsøgsresultater . . . . .	5
1.6	Behandling af forsøgsresultater . . . . .	5
1.6.1	Fjederkonstanter . . . . .	6
1.6.2	Svingningstider . . . . .	7
1.6.3	$k$ -værdier ud fra svingningstiden . . . . .	9
1.7	Fejldiskussion . . . . .	9
1.8	Konklusion . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Matematisk pendul</b>	<b>10</b>
2.1	Formål . . . . .	10
2.2	Apparatur . . . . .	10
2.3	Teoriafsnit . . . . .	10
2.3.1	Svingningstiden for et pendul . . . . .	10
2.4	Udførelse . . . . .	11
2.5	Forsøgsresultater . . . . .	12
2.6	Behandling af forsøgsresultater . . . . .	12
2.6.1	Messingdiskossen . . . . .	12
2.6.2	Aluminiumdiskossen . . . . .	13
2.6.3	Den tilnærmede formels betydning . . . . .	14
2.7	Fejldiskussion . . . . .	15
2.8	Konklusion . . . . .	15

# Kapitel 1

## Fjedersvingninger

### 1.1 Formål

Formålet med øvelse er at undersøge to fjedre. Vi vil bestemme deres fjederkonstanter og deres svingningstider, når de er belastede.

### 1.2 Apparatur

Et stativ med fjederholder, en lodholder bestående af stang med skål, to fjedre og et spejl med målestok.

### 1.3 Teoriafsnit

Al teorien omkring fjedres virkemåde bygger på *Hooke's lov*. Denne lov gælder med meget god tilnærmelse for selv komplicerede legemer, bare de opfylder den betingelse at kraften er direkte proportional med udstrækningen eller sammenpresningen.

#### 1.3.1 Hooke's lov

Ifølge Hooke's lov, er fjederkrafter  $F_{fj}$  ligefremproportional med udsvinget  $x$ . Proportionalitetsfaktoren kaldes fjederkonstanten,  $k$ , og sammenhængen formuleres således:

$$F_{fj} = -kx \quad (1.1)$$

Da man ønsker at  $k$  skal være en positiv konstant, og da fjederkraften virker i modsat retning af udsvinget (både ved strækning og sammenpresning af fjederen), kommer det et minus på  $k$ .

Når fjederen så hænger i ro, må der gælde at fjederkraften er ligeså stor som tyngdekraften på lodderne, men modsat retter:

$$F_g = -F_{fj} \quad (1.2)$$

Sammen med ligning 1.1, giver det følgende sammenhæng mellem tyngdekraften på lodderne og udstrækningen af fjederen:

$$F_g = -F_{fj} = -(-kx) = kx \quad (1.3)$$

Hvis vi plotter  $F_g$  som funktion af  $x$ , kan vi altså bestemme  $k$  som hældningskoefficienten til den bedste rette linie igennem punkterne.

### 1.3.2 Parallelkobling

Ved en parallelkobling af  $n$  fjedre, gælder det følgende formel for den totale fjedrekraft  $F_p$ :

$$\begin{aligned} F_p &= F_1 + F_2 + \cdots + F_n \\ &= -k_1 \cdot x - k_2 \cdot x - \cdots - k_n \cdot x \\ &= -(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)x \end{aligned} \quad (1.4)$$

Alle fjedre virker på samme legeme, så den totale kraft,  $F_p$  er lig summen af de enkelte kræfter. Da alle fjedre er lige lange, er en forlængelse  $x$  af fjederkoblingen lig en forlængelse af alle fjedrene på  $x$ .

Fjederkonstanten for en parallelkobling,  $k_p$ , med  $n$  fjedre er altså givet ved denne formel:

$$k_p = k_1 + k_2 + \cdots + k_n \quad (1.5)$$

### 1.3.3 Seriekobling

Når fjedrene seriekobles, er den samlede forlængelse  $x$  lig summen af de enkelte fjedres forlængelser,  $x_1$  og  $x_2$ .

Den totale fjedrekraft,  $F_s$ , er lig de enkelte fjedres kræfter. Alle fjedrene virker altså med lige store kræfter. Det skyldes at en fjeder trækker sig sammen "fra begge ender". Når en fjeder er belastet i lodret retning, vil den påvirke både loddet og ophænget med samme kraft. Da loddet ikke accelereres, er kraften lig tyngdekraften på loddet, med modsat fortegn, da kraften virker i modsat retning.

Det samme gælder hvis vi hænger  $n$  fjedre op efter hinanden — de trækker alle i hinanden med samme kraft. Da kræfterne er modsat rettede to og to, bliver der ingen acceleration.

Disse betragtninger sammenfattes til disse ligninger:

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad (1.6)$$

$$F_s = F_1 = F_2 = \cdots = F_n \quad (1.7)$$

Det giver os videre at:

$$\frac{x}{F_s} = \frac{x_1}{F_1} + \frac{x_2}{F_2} + \cdots + \frac{x_n}{F_n} \quad (1.8)$$

Da  $k$  i følge ligning 1.1 på foregående side er givet ved  $F_{fj} = -kx$ , og  $F_{fj}$  er givet ved  $F_{fj} = -F_t$ , kan vi nu udlede en formel for fjederkonstanten i en seriekobling,  $k_s$ :

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \quad (1.9)$$

Denne formel gælder også når man bruger  $n$  fjedre.

### 1.3.4 Svingningstider

Der er en sammenhæng mellem svingningstiden,  $T$ , massen der svinger,  $m$  og fjederkonstanten,  $k$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.10)$$

Denne formel for svingningstiden udledes ved at se på Hooke's lov (se ligning 1.1 på side 2). Udsvinget  $x$  afhænger af tiden, så vi vil betegne det som  $x(t)$ . Ydermere siger Newtons anden lov at  $F = ma = mx''(t)$ . Derfor kan vi omskrive Hooke's lov således:

$$\begin{aligned} F_{fj} &= -k \cdot x \Leftrightarrow \\ m \cdot x''(t) &= -k \cdot x(t) \Leftrightarrow \\ x''(t) &= -\frac{k}{m}x(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Denne differentiielligning har følgende løsning, hvor konstanterne har fået passende symboler:

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_0\right) \quad (1.12)$$

Her er  $A$  amplituden for svingningen,  $\alpha_0$  er begyndelsesfasen. Disse størrelser vil vi ikke interessere os for, da det er  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  som har betydning for svingningstiden,  $T$ . Argumentet til sinus skal vokse med  $2\pi$  for at vi har en hel svingning — svingningstiden bliver derfor:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

I 1.13 er  $k$  så fjederkonstanten og  $m$  er den svingende masse.

## 1.4 Udførelse

Begge fjedre, lodholderen og parallelkoblingspladen vejes.

### 1.4.1 Bestemmelse af fjederkonstanter

En af fjedrene ophænges i fjederholderen på stativet og lodholderen hægtes på. Fjederen hænger nu i vores nulpunkt, så målestokken indstilles så den afspejler dette.

Man starter med at lægge 5 g i skålen, og fortsætter op til 25 g i spring på 5 g. Positionen aflæses hver gang, hvilket giver os  $\Delta s$ . Man gentager så forsøget med den anden fjeder, denne gang springer man dog 10 g imellem hver måling, fra 10 g til 50 g.

I begge tilfælde har man også nulpunktet som en måling.

$m$ (kg)	$F_g$ (N)	$s$ (m)	$\Delta s$ (m)
0	0	0.01	0
0.005	0.0491	0.025	0.015
0.010	0.0982	0.042	0.032
0.015	0.1473	0.056	0.046
0.020	0.1964	0.0725	0.0625
0.025	0.2455	0.074	0.064

Tabel 1.1: Data for Fjeder I

$m$ (kg)	$F_g$ (N)	$s$ (m)	$\Delta s$ (m)
0	0	0.010	0
0.01	0.0982	0.040	0.03
0.02	0.1964	0.073	0.063
0.03	0.2946	0.104	0.094
0.04	0.3928	0.136	0.126

Tabel 1.2: Data for Fjeder II

### 1.4.2 Bestemmelse af svingningstider

Den ene fjeder ophænges med en passende belastning i lodholderen. Dernæst sættes den i svingninger, og tiden for 20 svingninger måles. Forsøget gentages med den anden fjeder, med de to fjedre i parallelkobling, og endelig i seriekobling.

## 1.5 Forsøgsresultater

Resultaterne fra forsøget med Fjeder I findes i tabel 1.1 og for Fjeder II i tabel 1.2.

Tidstagningerne til bestemmelse af svingningstiden findes i tabel 1.3.

Masserne af de forskellige ting vi brugte i øvelsen er i tabel 1.4 på næste side

## 1.6 Behandling af forsøgsresultater

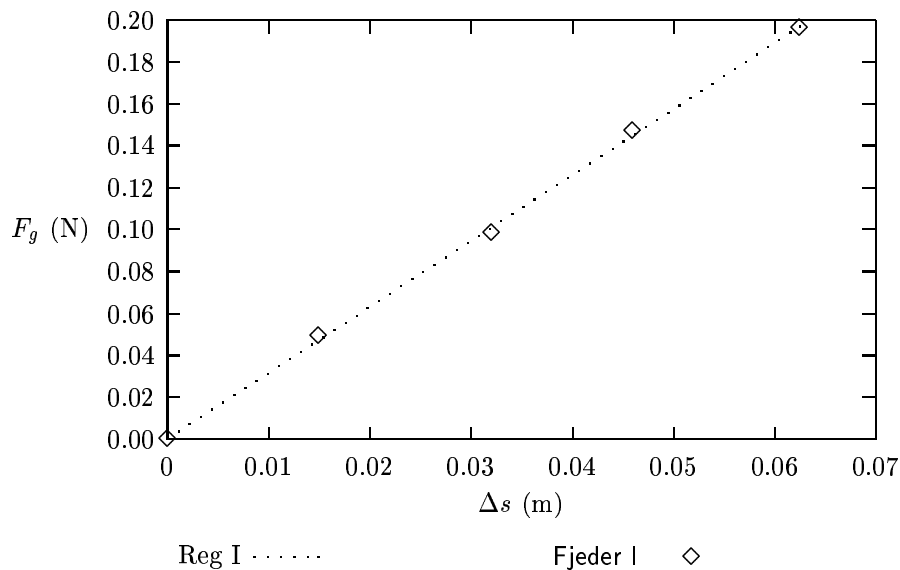
Først bestemmes fjederkonstanterne for Fjeder I og Fjeder II. Derefter beregnes de teoretiske svingningstider, og disse sammenholdes med de faktiske.

	Fjeder I	Fjeder II	Parallel	Serie
20T (s)	7.39	7.56	7.56	13.12
T (s)	0.370	0.378	0.378	0.656
Svingende masse $m$ (kg)	0.0109	0.0109	0.0227	0.0174

Tabel 1.3: Svingningstider ved forskellige koblinger af Fjeder I og Fjeder II

	Symbol	Masse (kg)
Fjeder I	$m_I$	0.00434
Fjeder II	$m_{II}$	0.00442
Lodholder	$m_{lh}$	0.00445
Parallelkoblingsplade	$m_{pkp}$	0.00529

Tabel 1.4: Masserne af fjedrene, lodholderen og parallelkoblingspladen



Figur 1.1:  $F_g$  som funktion af  $\Delta s$  for Fjeder I

### 1.6.1 Fjederkonstanter

Som nævnt under teori afsnittet på side 2, forventer vi at vores punkter fra tabel 1.1 på foregående side og 1.2 på forrige side vil ligge på en ret linie. Det gør de også, som man kan se på figur 1.1 og figur 1.2 på den følgende side.

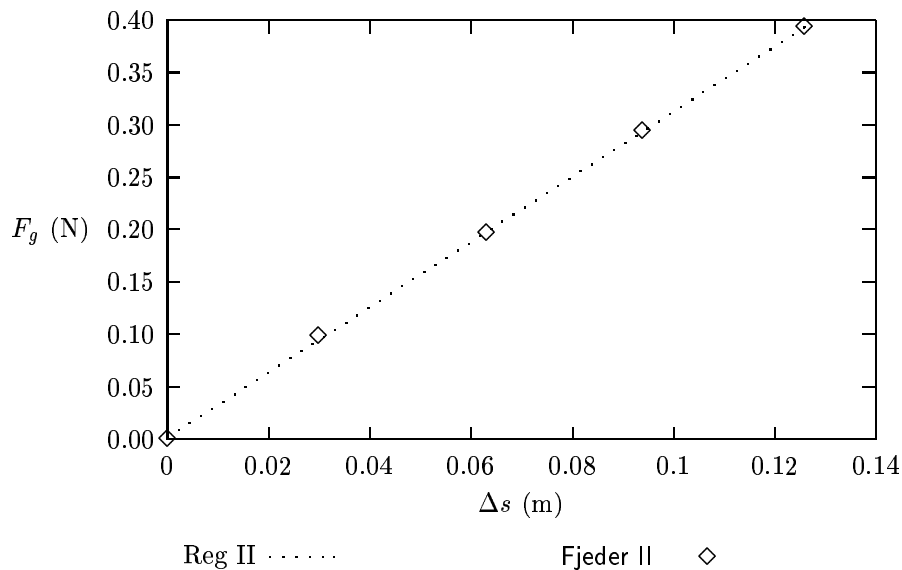
Ligningerne for de to bedste rette linier er fundet ved regression efter ligningen  $y = \alpha \Delta s + b$ :

$$y_{\text{Reg I}} = 3.1454 \times \Delta s + 0.000379 \quad (1.14)$$

$$y_{\text{Reg II}} = 3.1071 \times \Delta s + 0.001896 \quad (1.15)$$

Det fremgår af figurene, at disse linier meget fint til vores målepunkter. Med undtagelse af det sidste punkt fra Fjeder I.

Dette punkt (0.2455, 0.064) ligger så skævt i forhold til de andre punkter, at jeg besluttede at se bort fra det. På figur 1.3 på side 8 ser man hvordan de bedste rette linier ligger når punktet er med og når det ikke er med. Linien “4 punkter” er den bedste rette linie når man kun bruger de første fire punkter, mens linien “5 punkter” fremkommer når man bruger alle fem punkter. Det ses



Figur 1.2:  $F_g$  som funktion af  $\Delta s$  for Fjeder II

	Fjeder I	Fjeder II	Parallel	Serie
$T_{\text{målt}}$ (s)	0.370	0.378	0.378	0.656
$T_{\text{beregnet}}$ (s)	0.370	0.373	0.378	0.662
Afvigelse	0.0%	1.34%	0.0%	-0.60%

Tabel 1.5: Sammenligning af de målte og beregnede svingningstider

tydeligt, at punktet øverst til højre trækker den sidste linie skæv, og at det altså er en fejlmåling.

Ud fra ligningerne 1.14 og 1.15 på forrige side, får vi følgende  $k$ -værdier:

$$\begin{aligned}
 k_{\text{I}} &= 3.1454 \text{ N/m} \\
 k_{\text{II}} &= 3.1071 \text{ N/m}
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

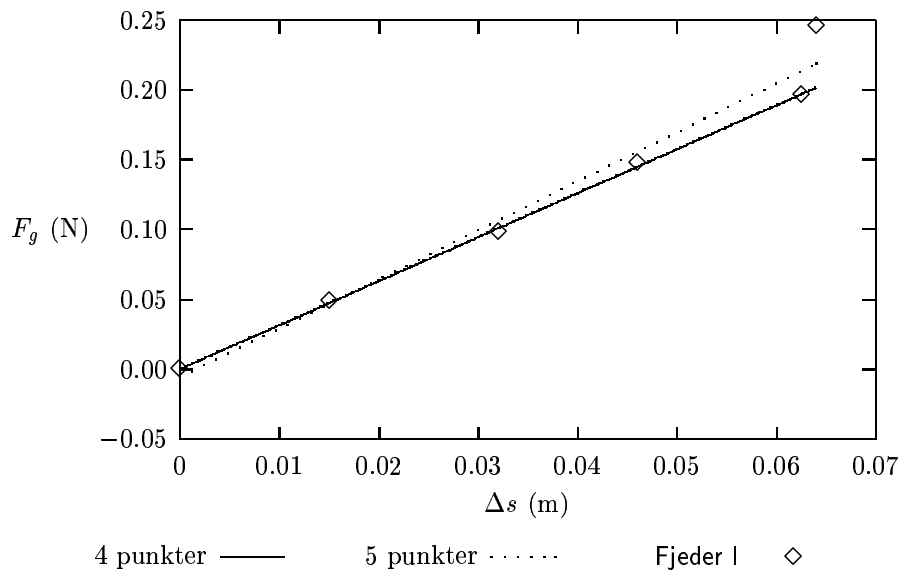
## 1.6.2 Svingningstider

De teoretiske svingningstider beregnes efter den i teori afsnittet fundne formel (ligning 1.13 på side 4), og resultaterne sammenlignes så med de målte svingningstider.

De beregnede og målte svingningstider findes i tabel 1.5. Her ses det at afvigelserne er *meget* små.

Tallene i tabel 1.5 er fundet ved at bruge de masser som står i tabel 1.4 på forrige side, og de  $k$ -værdier som står i ligning 1.16. Ved parallel- og seriekoblingerne skulle vi først finde henholdsvis  $k_p$  og  $k_s$ .  $k_s$  findes således, i følge





Figur 1.3: Plot som viser hvordan de den bedste rette linie forandrer sig, når alle målepunkterne tages med fra serien for Fjeder I

ligning 1.9 på side 3:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k_s} &= \frac{1}{k_I} + \frac{1}{k_I} \Leftrightarrow \\
 k_s &= \left( \frac{1}{k_I} + \frac{1}{k_I} \right)^{-1} \\
 &= \left( \frac{1}{3.1454 \text{ N/m}} + \frac{1}{3.1071 \text{ N/m}} \right)^{-1} \\
 &= 1.563 \text{ N/m}
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Denne værdi for  $k_s$  indsættes så i ligning 1.13 på side 4, så vi kan finde en svingningstid:

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{0.01737 \text{ kg}}{1.563 \text{ N/m}}} \\
 &= 0.662 \text{ s}
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Den svingende masse er fundet efter denne formel:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{m_I + m_{II}}{3} + m_{lh} + m_{lodder} \\
 &= \frac{0.00434 \text{ kg} + 0.00442 \text{ kg}}{3} + 0.00445 \text{ kg} + 0.0010 \text{ kg} \\
 &= 0.01737 \text{ kg}
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

	Parallel	Serie
$k_{\text{målt}}$ (s)	6.253	1.563
$k_{\text{beregnet}}$ (s)	6.260	1.594
Afvigelse	0.1%	-1.9%

Tabel 1.6: Sammenligning af de målte og beregnede  $k$ -værdier

### 1.6.3 $k$ -værdier ud fra svingningstiden

Vi kan også regne den anden vej, og finde  $k$ -værdier ud fra de målte svingningstider og ligning 1.13 på side 4. Først skal  $k$  isoleres:

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \\
 T^2 &= 4\pi^2\frac{m}{k} \Leftrightarrow \\
 k &= 4\pi^2\frac{m}{T^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

I tabel 1.6 findes en sammenligning af de netop beregnede  $k$ -værdier og de  $k$ -værdier vi beregnede ved at bruge formel 1.5 og 1.9 på side 3.

Vi ser at afvigelserne igen er meget små, og at teorien altså passer — både når man regner forlæns og når man regner baglæns.

## 1.7 Fejldiskussion

Som allerede nævnt, lå det sidste punkt i måleserien fra Fjeder I så skævt, at jeg så bort fra det ved beregningerne af fjederkonstanten.

Derudover må man sige at vores målinger lå meget pænt omkring de bedste rette linier, hvilket tyder på at usikkerhederne er gået ud mod hinanden. Hvis der havde været en systematisk fejl, ville punkterne ikke have ligget så pænt omkring linierne.

## 1.8 Konklusion

Ved at plote fjederkraften som funktion af udstrækningen fandt vi en værdi for fjederkonstanten. Denne  $k$ -værdi kunne vi også beregne ved at gå ud fra svingningstiden.

Denne værdi blev brugt til de senere beregninger af svingningstiden. Disse svingningstider blev så sammenlignet med de målte, og der var en *meget* fin overensstemmelse. Alle afvigelserne lå inden for 1–2%.

Vi har altså vist at Hooke's lov gælder for fjedre, og viste at vi kunne udlede fjederkonstanter teoretisk.

## Kapitel 2

# Matematisk pendul

### 2.1 Formål

Vi vil benytte et pendul til at bestemme tyngdeaccelerationen. Dette gøres ud fra sammenhørende værdier af svingningstiden og længden.

Endvidere vil vi undersøge om svingningstiden afhænger af pendulets masse og svingningens amplitude. Dette undersøges både ud fra teoretiske overvejelser og eksperimentelle undersøgelser.

### 2.2 Apperatur

Forsøgsstativ med en vandret stang til ophæng af pendulet, to diskos med forskellig masse (lavet af messing og aluminium), et stopur, en målestok, noget sytråd og en vinkelmåler.

### 2.3 Teoriafsnit

En central egenskab ved et pendul, er at dets svingningstid,  $T$ , kun afhænger af pendullængden,  $l$ , og altså ikke af f.eks. den svingende masse. Vi vil nu udlede en formel for  $T$ .

#### 2.3.1 Svningningstiden for et matematisk pendul

Vi regner på et ideelt pendul, hvilket vil sige at vi regner snoren for masseløs, og tænker os at hele pendulets masse er samlet i ét punkt.

Pendulet holder hele tiden afstanden  $l$  fra det punkt hvortil det er fastgjort — der er altså ingen acceleration i retning af dette punkt. Til gengæld accelererer punktet langs cirkelbuen i tangentens retning, det ses ved at farten stiger fra yderpunkterne i udsvinget ind mod midten.

Der virker altså en kraft i tangentens retning, og vi ønsker så at finde en formel for denne kraft.

Tyngdekraften virker med en kraft i tangentens retning som ved trekantsbetragtning findes til at være:

$$F = -F_t \sin \alpha \quad (2.1)$$

Vi vil gerne have denne kraft udtrykt ved cirkelbuens længde,  $x$ , som er givet ved  $x = \alpha \cdot l$ , hvor  $\alpha$  er vinklen for udsvinget.

Da  $\sin \alpha \approx \alpha$  for små vinkler, kan vi skrive ligning 2.1 på foregående side om således:

$$\begin{aligned} F &= -F_t \sin \alpha \approx -F_t \alpha \\ &= -mg\alpha \\ &= -\frac{mg}{l}x \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ligning 2.2 gælder altså kun for små vinkler. Skriver vi den således:

$$F = -kx \quad k = \frac{mg}{l} \quad (2.3)$$

ser vi at den opfylder kravet til Hooke's lov, altså at kraften kan skrives som en konstant ganget udsvinget. Vi kan altså finde svingningstiden ved at bruge formel 1.13 på side 4:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Man skal især lægge mærke til at massen,  $m$ , *ikke* indgår i den endelige formel. Derfor vil vi forvente, at vi får en ret linie igennem  $(0, 0)$ , hvis vi afsætter kvadratet på svingningstiden,  $T$ , som funktion af pendullængden,  $l$ :

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow \\ T^2 &= \frac{4\pi^2}{g}l \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hældningskoefficienten bliver altså  $\frac{2\pi^2}{g}$ , og afhænger altså kun af tyngdeaccelerationen,  $g$ .

## 2.4 Udførelse

Først hænges messingdiskossen op i den vandrette stang. Den ophænges bifilart, hvilket vil sige at den hænger i to tråde, som så bindes fast i hver ende af den vandrette stang. Dette ophæng forhindrer koniske svingninger, så messingdiskossen kun svinger i et plan.

Der foretages 10 målinger, hvor man noterer pendullængden, som så er den lodrette afstand fra den vandrette stang ned til midten af diskossen, og tiden for 10 svingninger. Pendullængden varieres fra 30 cm til 120 cm i spring på 10 cm. Disse målinger giver os  $l$  og  $10T$ .

Der udføres også en enkelt måling med aluminiumsdiskossen.

Til sidst laver man fem målinger med samme pendullængde. Her varieres amplituden, så man måler ved følgende amplituder:  $1^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $50^\circ$ . *Ved alle andre målinger holdes amplituden under  $5^\circ$ .*

Diskos	$l$ (m)	$10T$ (s)	$T^2$ (s <sup>2</sup> )
Messing	1.254	22.50	5.06
	1.106	20.90	4.37
	0.992	20.15	4.31
	0.916	20.15	3.67
	0.810	19.15	3.23
	0.719	16.97	2.88
	0.601	15.46	2.39
	0.504	14.24	2.03
	0.413	12.78	1.63
	0.300	11.03	1.22
Aluminium	0.306	11.03	1.22

Tabel 2.1: Data for messing- og aluminiumsdiskossen.  $l$  er pendullængden,  $10T$  er den målte tid for 10 svingninger og  $T^2$  er kvadratet på svingningstiden.

Udsving	1°	5°	10°	20°	45°
$10T_{\text{eks}}$ (s)	23.36	23.72	23.59	23.38	24.41
$T_{\text{eks}}$ (s)	2.336	2.372	2.359	2.338	2.441
$T_{\text{teo}}$ (s)	2.362	2.362	2.362	2.362	2.362

Tabel 2.2: Tider ved udsving med forskellig amplitude

## 2.5 Forsøgsresultater

Resultaterne fra de 10 målinger på messingdiskossen og den ene måling på aluminiumsdiskossen findes i tabel 2.1.

Data fra forsøget med forskellig amplitude, findes i tabel 2.2.

## 2.6 Behandling af forsøgsresultater

Først behandles de 10 målinger lavet med messingdiskossen, dernæst sammenlignes der med punktet fra aluminiumsdiskossen.

### 2.6.1 Messingdiskossen

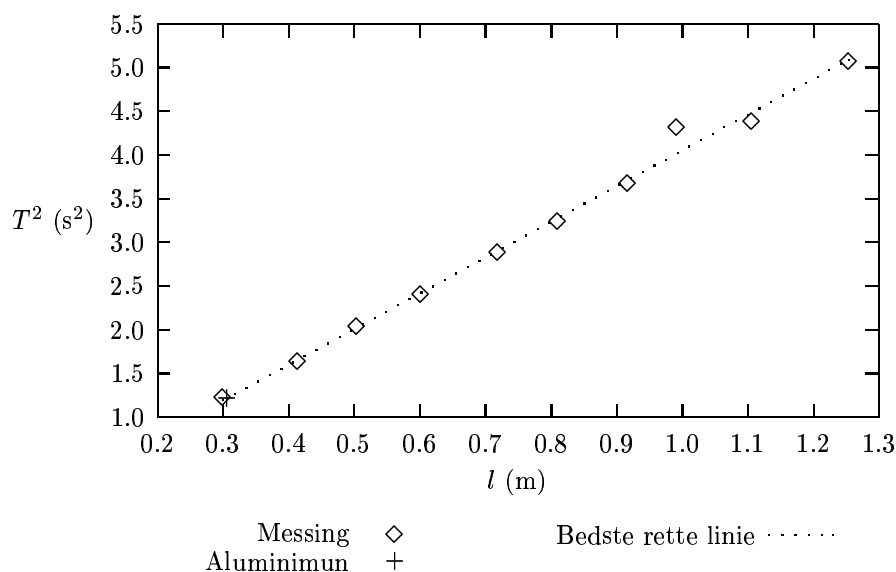
Som allerede omtalt i teoriafsnittet på side 10, forventer vi at få en ret linie, når vi plotter kvadratet på svingningstiden som funktion af pendullængden. Det ses på figur 2.1 på næste side, at punkterne faktisk ligger pænt på linie.

Igen er der et punkt, som ligger lidt ved siden af linien, men da vi her har 10 målinger, mener jeg ikke at det vil betyde noget særligt for det endelige resultat.

Ligningen for den bedste rette linie igennem punkterne er:

$$y = 4.090x - 0.0366 \quad (2.6)$$

Denne ligning går næsten igennem  $(0,0)$ , sådan som teorien forudsagde.



Figur 2.1: Kvadratet på svingningstiden,  $T^2$ , som funktion af pendullængden,  $l$

Som forklaret i teoriafsnittet, kan hældningen,  $\alpha$ , bruges til at beregne tyngdeaccelerationen. Da  $x$ -aksens enhed er meter og  $y$ -aksens er  $s^2$ , bliver hældningskoefficientens enhed  $\frac{s^2}{m}$ :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{4\pi^2}{g} \Leftrightarrow \\ g &= \frac{4\pi^2}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{4.090 \frac{s^2}{m}} \\ &= 9.65 \frac{m}{s^2}\end{aligned}\tag{2.7}$$

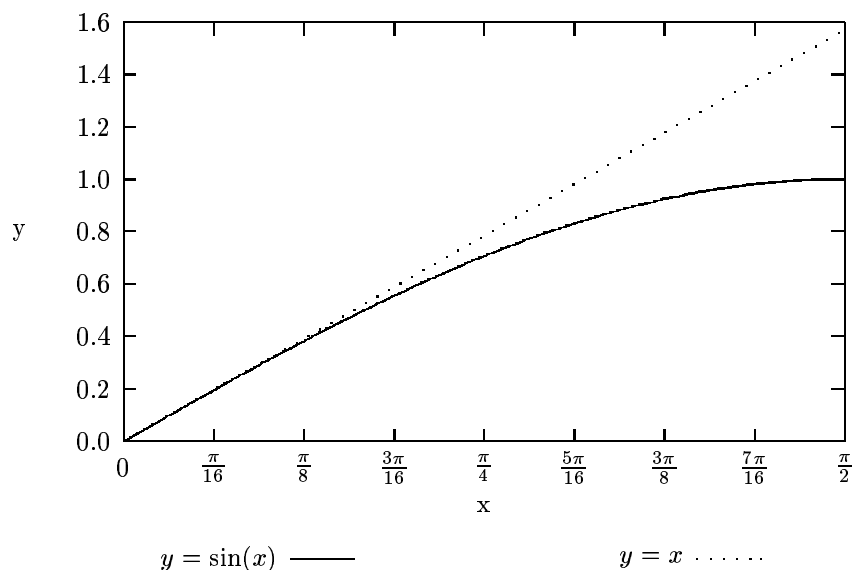
Denne værdi for  $g$  ligger meget tæt på vores tabelværdi:

$$\begin{aligned}\Delta\% &= \frac{9.65 \frac{m}{s^2} - 9.82 \frac{m}{s^2}}{9.82 \frac{m}{s^2}} \\ &= -1.7\%\end{aligned}\tag{2.8}$$

### 2.6.2 Aluminiumdiskossen

Der blev foretaget én måling med aluminiumsdiskossen, og dette punkt ligger helt nede i venstre hjørne på figur 2.1. Som det også ses af tabel 2.1 på foregående side, falder punktet næsten sammen med den sidste måling med messingdiskossen.

Det at de to punkter er næsten ens, viser fint, at massen ikke har betydning for svingningstiden. Aluminiumsdiskossen er lettere end messingdiskossen, men begge har alligevel samme svingningstid, ved samme pendullængde — ganske som teorien sagde.



Figur 2.2: Sammenligning af  $y = x$  og  $y = \sin x$

### 2.6.3 Den tilnærmede formels betydning

Da vi udledte formelen for svingningstiden (ligning 2.4 på side 11), lavede vi den tilnærmeste, at sige at  $\sin \alpha \approx \alpha$ , for små vinkler. Denne tilnærmelse bliver dårligere og dårligere, som  $\alpha$  vokser, som man kan se på figur 2.2.

Det ses at kurven for sinus og den rette linie følges pænt ad det første stykke, indtil omkring  $x = \frac{\pi}{8}$ . Det viser at vores tilnærmelse passer indtil vinklen overstiger cirka  $23^\circ$ .

Vi vil nu se på, om de svingningstider vi udregner ved at bruge formel 2.1 på side 10, er større eller mindre end de faktisk målte. Vi ved allerede at vores udledning bygger på en tilnærmelse, og vil nu undersøge denne nærmere.

Vi så på figur 2.2, at  $\sin \alpha$  er mindre end  $\alpha$ . Det giver os videre at:

$$\begin{aligned}
 F &= -F_t \sin \alpha < -F_t \alpha \Leftrightarrow \\
 F &< -F_t \alpha \Leftrightarrow \\
 F &< -\frac{mg}{l} x \Leftrightarrow \\
 F &< -kx
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Den kraft vi beregner er altså en smule for lille, hvilket er det samme som at  $k$  er lidt *større* en reelt. Når vi så indsætter  $k$  i formelen for svingningstiden får vi at tiden bliver for lidt for *lille*.

Vores data ligger så pænt omkring den bedste rette linie, at jeg ikke vil drage nogen konklusion på det grundlag. I teorien skulle vores værdier være lidt for små, men som det ses i tabel 2.3 på den følgende side, afviger  $k$  så lidt fra den rigtige værdi, at det ikke kan ses i det endelige resultat.

Udsving	1°	5°	10°	20°	45°
$T_{\text{eks}}$ (s)	2.336	2.372	2.359	2.338	2.441
$T_{\text{teo}}$ (s)	2.362	2.362	2.362	2.362	2.362
Afvigelse	-1.1%	0.4%	-0.1%	-1.0%	3.3%
Teoretisk fejl på $k$	0.0%	0.1%	0.5%	2.0%	10.0%

Tabel 2.3: Sammenligning mellem den faktiske og forventede fejl ved målingerne

Rækken med den teoretiske fejl på  $k$ , er beregnet således:

$$\text{Teoretisk fejl på } k = \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha} \quad (2.10)$$

Jeg går altså ud fra at fejlen på  $k$  er proportional med fejlen mellem  $\alpha$  og  $\sin \alpha$ .

## 2.7 Fejldiskussion

Vore målinger ligger *meget* tæt op ad den bedste rette linie, og passer fint med teorien. Jeg mener derfor ikke at det har været de store unøjagtigheder i dette forsøg.

Der var dog en enkelt måling som hoppede lidt over linien, men som allerede nævnt, mener jeg ikke at den har ændret ved det endelige resultat, da vi har ni andre punkter, som passer fint med teorien.

## 2.8 Konklusion

Vi fik eftervist en række formler vedrørende penduler og deres svingningstider. Generelt passede teorien utroligt godt med de faktiske målinger.

Vi viste at:

- pendulers svingningstider kun afhænger af pendullængden, og ikke af f.eks. massen.
- tyngdeaccelerationen kan bestemmes ved at se på et svingende pendul. Vi regnede baglæns og fandt en værdi for  $g$  som kun lå  $-1.7\%$  fra tabelværdien.
- Hooke's lov gælder som en meget god tilnærmelse for et pendul. Selv ved amplituder på f.eks.  $45^\circ$  lå vores måling kun  $3.3\%$  fra den teoretiske værdi.