Eksamensnoter til Analyse 1

Martin Geisler ⟨gimpster@daimi.au.dk⟩

Sommer 2003

Indledning

Disse noter gennemgår de 26 spørgsmål stillet til den mundtlige eksamen i Analyse 1 ved Aarhus Universitet sommeren 2003.

For hvert spørgsmål er der udvalgt relevante definitioner og sætninger. Sætningerne er forsøgt bevist i stor detalje hvor alle de små trin er beskrevet og begrundet.

Nummerene på sætninger, propositioner og lemmaer henviser indtil afsnit 21 til bogen *Real Analysis* af H. L. Royden, tredje udgave, 1988 og derefter til *Forelæsningsnoter til Analyse 1* af Jørgen Vesterstrøm, femte udgave, marts 2003.

foo bar

Indhold

1 Åbne og lukkede mængder i inklusiv Heine-Borels overdækningssætning

Åben mængde En mængde O kaldes *åben* hvis

$$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq O.$$

Når vi blot ser på den reelle akse, så bliver kuglen $B_\varepsilon(x)$ til det åbne interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Kontaktpunkt Et punkt x kaldes et *kontaktpunkt* til mængden F hvis

$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap F \neq \emptyset.$$

Mængden af kontaktpunkter til F kaldes *afslutningen* af F og betegnes $\bar{F}$.

Lukket mængde En mængde F kaldes *lukket* hvis $F = \bar{F}$.

Sætning 2.15 (Heine-Borel) Lad F være en lukket og begrænset mængde i $\mathbb{R}$. Da kan enhver åben overdækning af F udtyndes til en endelig overdækning. Altså, hvis $F \subseteq \bigcup_{O \in C} O$ for en mængde af åbne mængder C, så findes $\{O_1, O_2, \ldots, O_n\} \subseteq C$ sådan at

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i.$$

Vi betragter først tilfældet hvor $F = [a, b]$. Lad E være mængden af $x \leqslant b$ hvor $[a, x]$ kan overdækkes af en endelig delmængde af mængderne i C. Da a dækkes af mindst én mængde i C er $a \in E$. Samtidig er E opad begrænset af b, så $c = \sup E$ findes og $c \in [a, b]$.

Da $c \in [a, b]$ så findes $O \in C$ sådan at $c \in O$. Da O er åben, så ligger $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ i O for et $\varepsilon > 0$. Hvis der findes tal i $[c, c + \varepsilon]$ som er mindre lig b, så vil hele intervallet $[a, c + \varepsilon]$ kan nu dækkes af de endelig mange mængder $O_1, O_2, \ldots, O_k, O$ hvor $O_1, O_2, \ldots, O_k$ var de åbne mængder der dækkede $[a, c]$. Men c er supremum for E, så sådanne punkter findes ikke, altså er $c + \varepsilon > b$ for alle $\varepsilon > 0$ samtidig med at $c \leqslant b$. Det medfører at $c = b$, og dermed at $b \in E$ sådan at $[a, b]$ kan overdækkes med endelig mange åbne intervaller fra C.

Lad nu F være en vilkårlig lukket og begrænset mængde. Da F er begrænset findes $[a, b]$ sådan at $F \subseteq [a, b]$. Vi sætter $C^* = C \cup \tilde{F}$

hvor $\tilde{F}$ er en åben mængde da F er lukket. Da C er en overdækning af F, så er

$$\mathbb{R} = F \cup \tilde{F} \subseteq \bigcup_{O \in C} O \cup \tilde{F} = \bigcup_{O \in C^*} O.$$

Altså overdækker C^* hele $\mathbb{R}$ og dermed specielt $[a, b]$. Vi kan derfor udtynde C^* til en endelig delmængde der overdækker $[a, b]$ og dermed også F. Hvis $\tilde{F}$ ikke er med i overdækningen, så er vi færdig. Hvis den er med, så kan vi fjerne $\tilde{F}$ fra overdækningen og så stadig have en overdækning af F da $F \cap \tilde{F} = \varnothing$ sådan at $\tilde{F}$ ikke bidrager til overdækningen af F.

Nødvendigheden af betingelserne Betingelsen i Heine-Borels overdækningssætning om at mængden skal være begrænset er nødvendig. For vi kan overdække $\mathbb{R}$ med intervallerne $(-n, n)$ for $n \in \mathbb{N}$ og denne overdækning kan ikke udtyndes til en endelige overdækning.

Kravet om at mængden skal være lukket er også nødvendigt. For det åbne interval (a, b) kan overdækkes indefra af

$$(a, b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right)$$

men denne overdækning kan igen ikke udtyndes.

2 Konstruktion af og egenskaber ved det ydre mål på $\mathbb{R}$

Ydre mål på $\mathbb{R}$ Med det ydre mål m^* ønsker vi en mængdefunktion der til enhver delmængde af $\mathbb{R}$ knytter et ikke-negativt udvidet reelt tal. Desuden skal det ydre mål være en udvidelse af længdebegrebet for intervallet. Vi definerer m^* ved

$$m^*(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup I_n} \sum l(I_n),$$

hvor $\bigcup I_n$ er en overdækning af A med åbne intervaller.

Man ser at m^* er *monoton* sådan at $A \subseteq B \implies m^*(A) \leqslant m^*(B)$, og desuden er $m^*(\varnothing) = 0$.

Proposition 3.1 Det ydre mål af et interval er lig intervallets længde, altså $m^*(I) = l(I)$.

Vi ser først på et lukket, begrænset interval $[a, b]$. For ethvert $\varepsilon > 0$ vil $[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ og da dette blot er én mulig overdækning af $[a, b]$, så får vi at

$$m^*([a, b]) \leqslant l((a - \varepsilon, b + \varepsilon)) = b - a + 2\varepsilon.$$

Da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$, så har vi at $m^*([a,b]) \leqslant b-a$.

Den omvendte ulighed vises ved at vise, der om alle intervaloverdækninger $\{I_n\}$ gælder, at $\sum l(I_n) \geqslant b-a$. Heine-Borels overdækningssætning siger, at vi kan udtynde $\{I_n\}$ til en endelig mængde af åbne intervaller. Disse vil have en samlet længde der er mindre end de oprindelige intervaller, så det er nok at vise uligheden for alle endelige overdækninger.

Da a overdækkes, så findes (a_1,b_1) sådan at $a_1 < a < b_1$. Hvis $b_1 > b$, så er vi færdige, for så er $l((a_1,b_1)) > b-a$, ellers så finder vi (a_2,b_2) så $a_2 < b_1 < b_2$. På den måde fortsætter vi indtil vi finder et åbent interval så $b \in (a_k,b_k)$. Da der er endelig mange intervaller vil processen altid stoppe.

Vi har nu udtaget en overdækkende delmængde sådan at

$$\begin{aligned}\sum l(I_n) \geqslant \sum &l((a_i,b_i))\\ &= (b_k-a_k)+(b_{k-1}-a_{k-1})+\cdots+(b_1-a_1)\\ &\geqslant b_k-a_1 \geqslant b-a,\end{aligned}$$

da $a_{i-1} < b_i$ for alle i. Dette viser, at $m^*([a,b]) \geqslant b-a$ og dermed har vi vist, at $m^*([a,b]) = b-a$.

Et åbent, begrænset interval I håndteres ved at måle på et lukket interval $J \subset I$ med længde $l(J) \geqslant l(I)-\varepsilon$ for et givent $\varepsilon > 0$. Da m^* er monoton, så får vi at

$$l(I)-\varepsilon \leqslant l(J) = m^*(J) \leqslant m^*(I) \leqslant m^*(\bar{I}) = l(\bar{I}) = l(I).$$

Lader vi ε gå mod 0 ser vi, at $l(I) = m^*(I)$.

For et ubegrænset interval I kan vi for ethvert reelt tal Δ finde et lukket interval $J \subset I$ med $l(J) = \Delta$. Dermed er $\Delta = l(J) = m^*(J) \leqslant m^(I)$ for alle Δ så $m^*(I) = \infty = l(I)$.

3 Lebesguemålet på $\mathbb{R}$

Ydre mål Det *ydre mål* m^* på $\mathbb{R}$ defineres ved

$$m^*(A) = \inf_{A\subseteq\bigcup I_n} \sum l(I_n),$$

hvor $\bigcup I_n$ er en overdækning af A med åbne intervaller.

Målelig mængde Det ydre mål er defineret for alle delmængder af $\mathbb{R}$, men det er ikke tællelig additivt på alle disse delmængder. Men på de målelige mængder bliver m^* tællelig additiv. En mængde E kaldes *målelig* hvis

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E})$$

for alle $A \subseteq \mathbb{R}$.

Da m^* er tællelig subadditiv, så gælder der altid

$$m^*(A) \leqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E})$$

og det er dermed nok at vise den omvendte ulighed for at vise lighed. Desuden ser man at $\tilde{E}$ er målelig når E er målelig på grund af symmetrien i definitionen.

De målelige mængder $\mathcal{M}$ Mængden af alle målelige mængder betegnes med $\mathcal{M}$. Da $E_1, E_2 \in \mathcal{M} \implies E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$ og $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$ er $\mathcal{M}$ en *algebra*.

Lebesguemålet m Vi definerer Lebesguemålet m som restriktionen af m^* til de målelige mængder. Dermed er $m(E) = m^*(E)$ for $E \in \mathcal{M}$.

Lemma 3.9 Lad mængden A være vilkårlig og lad $E_1, \ldots, E_n$ være en endelige følge af parvis disjunkte målelige mængder. Så gælder, at

$$m^*\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

Bevises føres som et induktionsbevis. For $n = 1$ er ligningen opfyldt. Antag nu at ligningen er opfyldt for alle tal op til $n - 1$. Da mængderne E_i er parvis disjunkte er

$$\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) \cap E_n = A \cap E_n \quad \text{og}$$

og

$$\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) \cap \widetilde{E_n} = A \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i.$$

Da E_n er en målelig mængde, så deler den målet af alle andre mængder op i to dele hvis mål summer op til den oprindelige mængde:

$$\begin{aligned} m^*\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) &= m^*(A \cap E_n) + m^*\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n-1}\Big) \\ &= m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i). \end{aligned}$$

Sætning 3.10 Mængden af alle Lebesguemålelige mængder, $\mathcal{M}$, er en σ-algebra.

Vi mangler at vise lukkethed under tællelig forening. Da $\mathcal{M}$ er en algebra, så kan en vilkårlig tællelig forening laves om til en tællelig forening af parvis disjunkte mængder med samme forening. Så lad A være en vilkårlig mængde, og $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ en følge af parvis disjunkte målelige mængder med forening E. Vi sætter $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ der så er målelig da det er en endelig forening af målelige mængder. Da $F_n \subseteq E$ så er $\tilde{E} \subseteq \widetilde{F_n}$ og dermed

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap \widetilde{F_n}) \\ &\geqslant m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap \tilde{E}). \end{aligned}$$

Vi har netop set (lemma 3.9), at m^* er tællelig additiv, så

$$m^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

sådan at

$$m^*(A) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap \tilde{E}).$$

Da venstresiden er uafhængig af n, så får vi at

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap \tilde{E}) \\ &\geqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E}), \end{aligned}$$

idet m^* er tællelig subadditiv.

4 Målelige funktioner på $\mathbb{R}$

Målelig mængde Det ydre mål defineret ved

$$m^*(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup I_n} \sum l(I_n),$$

hvor $\bigcup I_n$ er en overdækning af A med åbne intervaller, giver anledning til begrebet *målelig mængde*. Mængden E er målelig hvis

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E})$$

for alle $A \subseteq \mathbb{R}$.

Målelig funktion En funktion f siges at være *målelig* hvis den er defineret på en målelig mængde E og

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{x \in E \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}.$$

Da $\mathcal{M}$ er en σ-algebra, så har vi for et givent $\alpha \in \mathbb{R}$ at

$$\{x \in E \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M} \iff \{x \in E \mid f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathcal{M}$$

da de to mængder er hinandens kompliment. På tilsvarende måde kan man vise, at de skarpe og bløde uligheder kan laves om til bløde og skarpe uligheder. De fire mængder kaldes skarpe og bløde super- og subniveaumængder.

Proposition 3.19 Hvis f og g er to målelige funktioner på samme målelige mængde E, så er $f + g$ også målelig på E.

Vi viser at $\{x \in E \mid f(x) + g(x) > \alpha\}$ er målelig. Da $f(x) + g(x) > \alpha \iff f(x) > \alpha - g(x)$ så kan vi finde et $r \in \mathbb{Q}$ sådan at $f(x) > r > \alpha - g(x)$. Derfor er

$$\begin{aligned}&\{x \in E \mid f(x) + g(x) > \alpha\}\\ &\quad = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big(\{x \in E \mid f(x) > r\} \cap \{x \in E \mid g(x) > \alpha - r\}\Big)\end{aligned}$$

og dermed er $f + g$ målelig da superniveaumængden kan skrives som en tællelig forening af målelige mængder.

Næsten overalt Vi siger at egenskaben P gælder *næsten overalt* hvis $m(\{x \mid \neg P(x)\}) = 0$, altså hvis undtagelsesmængden er en nulmængde.

Proposition 3.21 Lad f være en målelig funktion. Hvis $f = g$ næsten overalt, da er g målelig.

Vi sætter $E = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$. Ifølge vores antagelse, så er dette en nulmængde. Mængden $\{x \mid g(x) > \alpha\}$ kan nu splittes op:

$$\begin{aligned}\{x \mid g(x) > \alpha\} = &\Big(\{x \mid f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E \mid g(x) > \alpha\}\Big)\\ &\sim \{x \in E \mid g(x) \leqslant \alpha\}.\end{aligned}$$

Da E er en nulmængde, så er enhver delmængde af E selv en nulmængde og dermed målelig. Endelig er f målelig og dermed er $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ målelig.

5 Lebesgueintegralet af en begrænset målelig funktion over en mængde med endeligt mål

Simpel funktion En funktion ϕ kaldes *simpel* hvis ϕ er defineret på en målelig mængde E og kun antager endelig mange værdier. En simpel funktion der antager værdierne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ har en entydig opskrivning som

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i},$$

hvor $E_i = \{x \in E \mid \phi(x) = a_i\}$. Disse mængder er parvis disjunkte og har forening E.

Integralet af en simpel funktion For en simpel funktion ϕ definerer vi *integralet* af ϕ på E ved

$$\int_E \phi = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i).$$

Proposition 4.3 Lad f være en begrænset funktion defineret på en målelig mængde E med $m(E) < \infty$. Da er

$$\sup_{\phi \leqslant f} \int_E \phi = \inf_{\psi \geqslant f} \int_E \psi$$

for alle simple funktioner ϕ og ψ netop når f er målelig.

Lad først f være målelig og begrænset af M. Mængderne

$$E_k = \left\{ x \in E \;\middle|\; (k-1)\frac{M}{n} < f(x) < k\frac{M}{n} \right\} \quad k = -n, \ldots, n$$

er så målelige, parvis disjunkte og har forening E. Tællelige additivitet giver så, at

$$\sum_{k=-n}^{n} m(E_k) = m(E) < \infty.$$

Vi definerer nu en række simple funktioner ϕ_n og ψ_n ved

$$\phi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{E_k} \quad \text{og} \quad \psi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_k}.$$

Disse opfylder at $\phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ for alle n. Når vi tager infimum og supremum får vi, at

$$\sup_{\phi \leqslant f} \int_E \phi \geqslant \int_E \phi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1) m(E_k)$$

og

$$\inf_{\psi \geqslant f} \int_E \psi \leqslant \int_E \psi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k m(E_k).$$

Dermed er

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \inf_{\psi \geqslant f} \int_E \psi - \sup_{\phi \leqslant f} \int_E \phi &\leqslant \int_E \psi_n - \int_E \phi_n \\ &= \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k - (k-1)) m(E_k) = \frac{M}{n} m(E). \end{aligned}$$

Da n var et vilkårligt tal konkluderer vi at $\sup \int_E \phi = \inf \int_E \psi$.

Hvis der omvendt gælder, at

$$\sup_{\phi \leqslant f} \int_E \phi = \inf_{\psi \leqslant f} \int_E \psi$$

så kan vi for ethvert n finde simple funktioner ϕ_n og ψ_n sådan at $\phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ og

$$\int_E \psi_n - \int_E \phi_n < \frac{1}{n}.$$

Simple funktioner er målelige, og dermed er også $\phi^* = \sup \phi$ og $\psi^* = \inf \psi$ målelige. Desuden er $\phi^* \leqslant f \leqslant \psi^*$. Ved at vise, at mængden

$$\Delta = \{x \in E \mid \phi^*(x) < \psi^*(x)\}$$

har mål 0, så ser vi at $\phi^* = \psi^*$ næsten overalt. Dermed er f lig en målelig funktion næsten overalt og er derfor selv målelig.

Vi kan skrive Δ som en tællelig forening af Δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, givet ved

$$\Delta_\nu = \left\{ x \in E \;\middle|\; \phi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{\nu} \right\}.$$

For alle n er mængderne Δ_ν indeholdt i mængden $\Delta_{(\nu,n)} = \{x \in E \mid \phi_n(x) < \psi_n(x) - 1/\nu\}$ hvis mål er mindre end ν/n fordi

$$\begin{aligned} \int_E (\psi_n - \phi_n) \leqslant \frac{1}{n} \Longrightarrow \int_{\Delta_{(\nu,n)}} (\psi_n - \phi_n) &\leqslant \frac{1}{n} \\ \Longrightarrow \int_{\Delta_{(\nu,n)}} \frac{1}{\nu} &\leqslant \frac{1}{n} \\ \Longrightarrow \mu(\Delta_{(\nu,n)}) &\leqslant \frac{\nu}{n}. \end{aligned}$$

Da dette gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, så får vi for $n \longrightarrow \infty$ at $m(\Delta_\nu) = 0$ for alle $\nu \in \mathbb{N}$. Da Δ så er en tællelig forening af nulmængder er Δ selv en nulmængde. Dermed er $f = \phi^* = \psi^*$ næsten overalt, og dermed målelig.

Lebesgueintegral af begrænset målelig funktion For en målelig og begrænset funktion f på E med $m(E) < \infty$ definerer vi *Lebesgueintegralet* af f over E ved

$$\int_E f = \inf_{\psi \geqslant f} \int_E \psi,$$

hvor ψ varierer over alle simple funktioner der dominerer f.

Lebesgueintegralet udvider Riemannintegralet Hvis f er Riemannintegrabel på $[a,b]$ så er f målelig og Riemannintegralet har samme værdi som Lebesgueintegralet.

Idet enhver trappefunktion også er en simpel funktion får vi at

$$R \underline{\int_a^b} f \leqslant \sup_{\phi \leqslant f} \int_a^b \phi \leqslant \inf_{\psi \geqslant f} \int_a^b \psi \leqslant R \overline{\int_a^b} f$$

da supremum vokser når mængderne vokser. Da f er Riemannintegrabel, så er der lighed, og dermed er $\sup \int_a^b \phi = \inf \int_a^b \psi$ hvilket medfører, at f er målelig.

6 Integralet af en ikke-negativ funktion

Integralet af en begrænset funktion Lad f være en begrænset målelig funktion defineret på en målelig mængde E med $m(E) < \infty$, så defineres integralet af f over E ved

$$\int_E f = \inf_{\psi \geqslant f} \int_E \psi.$$

Integralet af en ikke-negativ funktion Lad f være en (vilkårlig) ikke-negativ målelig funktion på en målelig mængde E med $m(E) < \infty$. Da defineres *Lebesgueintegralet* af f over E ved

$$\int_E f = \sup_{h \leqslant f} \int_E h,$$

hvor h varierer over alle begrænsede funktioner der domineres af f.

Sætning 4.9 (Fatous lemma) Hvis $\{f_n\}$ er en følge af ikke-negative målelige funktioner med $f_n \longrightarrow f$ næsten overalt på en målelig mængde E med $m(E) < \infty$, er

$$\int_E f \leqslant \liminf \int_E f_n.$$

Vi kan uden tab af generalitet antage, at $f_n \longrightarrow f$ overalt, idet integralet ikke påvirkes af funktionsværdierne på en nulmængde.

Lad $h \leqslant f$ være en begrænset funktion sådan at $m(E') < \infty$ hvor $E' = \{x \mid h(x) \neq 0\}$. Sæt

$$h_n = \min(h, f_n).$$

Dermed bliver h_n begrænset af h og $h_n(x) = 0$ for $x \notin E'$. Desuden går h_n mod h for alle $x \in E'$ da f_n går mod f. Vi ved fra tidligere, at integralet af begrænsede målelige funktioner konvergerer mod integralet af grænsefunktionen:

$$\int_{E'} h = \lim \int_{E'} h_n$$

Da $h_n \leqslant f_n$ for alle n og $E' \subseteq E$, så er

$$\lim \int_{E'} h_n \leqslant \lim \int_{E'} f_n \leqslant \lim \int_E f_n$$

Tager vi nu supremum over h, så får vi at

$$\int_E f = \sup_{h \leqslant f} \int_E h \leqslant \liminf \int_E f_n.$$

7 Integrable funktioner — Lebesgues konvergenssætning

Integralet af en ikke-negativ funktion Lad f være en ikke-negativ målelig funktion på en målelig mængde E med $m(E) < \infty$. Da defineres *Lebesgueintegralet* af f over E ved

$$\int_E f = \sup_{h \leqslant f} \int_E h,$$

hvor h varierer over alle begrænsede funktioner der domineres af f.

Definition af integrabel funktion En ikke-negativ målelig funktion f siges at være *integrabel* over en målelig mængde E hvis $\int_E |f| < \infty$.

Integralet af en vilkårlige funktion Lad f være en vilkårlig funktion på en målelig mængde E. Hvis f^+ og f^- begge er integrable over E, da definerer vi *Lebesgueintegralet* af f over E ved

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Sætning 4.9 (Fatous lemma) Se beviset på modstående side.

Sætning 4.16 (Lebesgues konvergenssætning) Lad g være en integrabel funktion, og lad $\{f_n\}$ være en følge af målelige funktioner sådan at $|f_n| \leqslant g$ på en målelig mængde E og sådan at $f_n \longrightarrow f$ næsten overalt. Da er funktionen f målelig, og

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

Funktionen $g - f_n$ er ikke-negativ, målelig og går mod $g - f$ næsten overalt. Fatous lemma giver så, at

$$\int_E (g - f) \leqslant \liminf \int_E (g - f_n) \leqslant \limsup \int_E (g - f_n),$$

hvor vi til sidst benyttede at limes superior altid dominerer limes inferior. Da $|f| \leqslant g$ er f integrabel og derfor kan integralet splittes op. Derfor er

$$\int_E g - \int_E f \leqslant \int_E g - \limsup \int_E f_n$$

sådan at $\int_E f \geqslant \limsup \int_E f_n$.

Ser vi i stedet på funktionen $g + f_n$, så er denne også ikke-negativ, målelig og får mod $g + f$ næsten overalt. Så Fatous lemma giver, at

$$\int_E (g + f) \leqslant \liminf \int_E (g + f_n)$$

og som før kan integralet splittes op til

$$\int_E g + \int_E f \leqslant \int_E g + \liminf \int_E f_n$$

sådan at $\int_E f \leqslant \limsup \int_E f_n$. Dermed er

$$\limsup \int_E f_n \leqslant \int_E f \leqslant \liminf \int_E f_n$$

og ligheden følger nu af at $\liminf \int_E f_n \leqslant \limsup \int_E f_n$.

Nødvendigheden af betingelserne Kravet om at f skal være begrænset i sætningen om begrænset konvergens er nødvendigt. Som modeksempel kan man for $n \geqslant 1$ definere $f_n\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{N}$ ved

$$f_n(x) = \begin{cases} n & -1/n \leqslant x \leqslant 1/n, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er f_n defineret på det begrænsede mængde $E = [-1,1]$ men $\|f_n\|_\infty \longrightarrow \infty$ når $n \longrightarrow \infty$.

Funktionen $f = 0$ opfylder at $f_n \longrightarrow f$ punktvist for alle $x \in [-1,1]$, men

$$\int_E f = 0 \neq \lim \int_E f_n = 2.$$

8 Ubestemt integral — absolut kontinuitet

Definition af begrænset variation En funktion f defineret på et interval $[a,b]$ siges at være af *begrænset variation* hvis

$$\sup \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| < \infty.$$

hvor der tages supremum over alle inddelinger $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ af $[a,b]$.

Definition af ubestemt integral Hvis f er integrabel på $[a,b]$ da siger vi at funktionen F defineret ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

er et *ubestemt integral.* Funktionen F kaldes også en *stamfunktion* til f.

Lemma 5.7 Lad f være en integrabel funktion på $[a,b]$. Da er stamfunktionen F defineret ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

en kontinuert funktion af begrænset variation.

Lad F være en stamfunktion til f på $[a,b]$. Proposition 4.14 siger, at der for alle $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ sådan, at

$$F(b') - F(a') = \int_{a'}^{b'} f(t)\,dt < \varepsilon$$

når $b' - a' < \delta$. Dermed er F kontinuert.

Vi skal også vise at F er af begrænset variation, så lad en vilkårlig inddeling $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ være givet. Da er

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left| F(x_i) - F(x_{i-1}) \right| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^{x_i} f(t)\,dt - \int_a^{x_{i-1}} f(t)\,dt \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| f(t) \right| dt \\
&= \int_a^b \left| f(t) \right| dt < \infty.
\end{aligned}$$

Idet inddelingen var vilkårlig, så bevares uligheden når vi tager supremum over alle inddelinger af $[a, b]$ og dermed er F af begrænset variation.

Definition af absolut kontinuitet En funktion f på $[a, b]$ er *absolut kontinuert* hvis der for alle $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, sådan at der for enhver endelig mængde af parvis disjunkte intervaller (x_i, x_i') i $[a, b]$ gælder, at

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| \leqslant \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_i') \right| \leqslant \varepsilon.$$

Man bemærker, at enhver absolut kontinuert funktion også er uniform kontinuert, idet man så blot betragter summen med ét led.

Sætning 5.14 En funktion F er et ubestemt integral hvis og kun hvis F er absolut kontinuert.

Vi viser kun af F er absolut kontinuert når F er et ubestemt integral, så lad

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in [a, b]$$

og $\varepsilon > 0$ være givet. Proposition 4.14 giver os nu et $\delta > 0$ sådan at der for alle målelige mængder $A \subseteq [a, b]$ gælder, at

$$m(A) < \delta \Longrightarrow \int_A f(t)\,dt < \varepsilon.$$

For enhver endelig mængde af parvis disjunkte intervaller (x_i, x_i') med forening A og $m(A) < \delta$ får vi nu, at

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| < \delta$$

medfører, at

$$\int_A f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_i'} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} F(x_i') - F(x_i) < \varepsilon.$$

Dermed er F absolut kontinuert.

Cantorfunktionen Cantorfunktionen er et eksempel på en funktion der er uniform kontinuert men ikke absolut kontinuert. Se figur 1.

Figur 1: Cantorfunktionen med otte iterationer.

Cantorfunktionen er differentiabel næsten overalt med differentialkvotient konstant lig 0 men er alligevel voksende. Dette viser, at kravet om at f skal være absolut kontinuert i lemma 5.13 ikke er overflødigt.

9 L^p-rum

Definition af L^p og $\|f\|_p$ Vi betegner mængden af alle målelige funktioner f der opfylder

$$\int_0^1 |f|^p < \infty$$

med L^p.

For $f \in L^p$ lader vi $\|f\|_p$ betegne det ikke-negative reelle tal

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}.$$

L^p er et vektorrum Summen af f og g fra L^p ligger også i L^p. Lad $f, g \in L^p$ være givet med $0 \leqslant |f| \leqslant |g|$. Da er $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ på grund af den normale trekantsulighed for reelle tal og desuden er

$$\begin{aligned} \frac{|f| + |g|}{2} \leqslant |g| &\Longrightarrow \frac{(|f| + |g|)^p}{2^p} \leqslant |g|^p \\ &\Longrightarrow \frac{(|f| + |g|)^p}{2^p} \leqslant |f|^p + |g|^p \\ &\Longrightarrow (|f| + |g|)^p \leqslant 2^p (|f|^p + |g|^p) \end{aligned}$$

sådan at $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$. Dermed bliver

$$\int_0^1 |f+g|^p \leqslant \int_0^1 2^p(|f|^p + |g|^p) \leqslant 2^p\left(\int_0^1 |f|^p + \int_0^1 |g|^p\right) < \infty.$$

Tilsvarende for skalarmultiplikation hvor vi for $f \in L^p$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ har at

$$\int_0^1 |\alpha f|^p = |\alpha|^p \int_0^1 |f|^p < \infty.$$

Sætning 6.1 (Minkowskis ulighed, $1 \leqslant p \leqslant \infty$) For $f, g \in L^p$ med $1 \leqslant p \leqslant \infty$ gælder, at $f + g \in L^p$ og

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

I tilfældet $p = \infty$ er f og g begrænsede funktioner næsten overalt, og dermed er $f + g$ også begrænset næsten overalt så $f + g \in L^\infty$. Hvis $f > \|f\|_\infty$ på E_1 og $g > \|g\|_\infty$ på E_2, så får vi at $f + g > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ på $E_3 \subseteq E_1 \cup E_2$. Da E_1 og E_2 er nulmængder, så er E_3 også en nulmængde da det er en delmængde af en nulmængde.

Altså er $f + g$ essentielt begrænset af $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Det mindste essentielle overtal er domineret af dette tal, så

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

I det almindelige tilfælde med $1 \leqslant p < \infty$ antager vi at $\|f\|_p = \alpha \neq 0$ og $\|g\|_p = \beta \neq 0$ — tilfældet hvor f eller g har p-norm 0 er trivielt. Definer nu f_0 og g_0 ved

$$f_0 = \frac{|f|}{\alpha} \quad \text{og} \quad g_0 = \frac{|g|}{\beta}.$$

Så er $\|f_0\|_p = \|g_0\|_p = 1$ da for eksempel

$$\|f_0\|_p^p = \int_0^1 \left|\frac{|f|}{\alpha}\right|^p = \frac{1}{|\alpha|^p}\int_0^1 |f|^p = \frac{1}{\|f\|_p^p}\|f\|_p^p = 1.$$

Sæt $\lambda = \alpha/(\alpha+\beta)$, så er $1 - \lambda = \beta/(\alpha+\beta)$. Vi har nu

$$\begin{aligned} |f+g|^p \leqslant (|f| + |g|)^p &= (\alpha f_0 + \beta g_0)^p \\ &= (\alpha+\beta)^p(\lambda f_0 + (1-\lambda)g_0)^p \\ &\leqslant (\alpha+\beta)^p(\lambda {f_0}^p + (1-\lambda){g_0}^p) \end{aligned}$$

da funktionen $t \longmapsto t^p$ er konveks på $[0, \infty)$ for $1 \leqslant p < \infty$. For en konveks funktion ϕ gælder nemlig, at

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y)$$

for $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Integrerer vi nu på begge sider og benytter linearitet af integralet, så får vi

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_0^1 |f+g|^p \\
&\leqslant \int_0^1 (\alpha+\beta)^p (\lambda {f_0}^p + (1-\lambda){g_0}^p) \\
&= (\alpha+\beta)^p \left(\lambda \int_0^1 {f_0}^p + (1-\lambda)\int_0^1 {g_0}^p\right) \\
&= (\alpha+\beta)^p (\lambda \|f_0\|_p^p + (1-\lambda)\|g_0\|_p^p) \\
&= (\alpha+\beta)^p = (\|f\|_p + \|g\|_p)^p.
\end{aligned}$$

Tager vi den p-te rod på hver side får vi $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Sætning 6.2 (Minkowskis ulighed, $0 < p < 1$**)** For $f, g \in L^p$ med $0 < p < 1$ gælder, at $f + g \in L^p$ og

$$\|f+g\|_p \geqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beviset kører præcis som i tilfældet med $1 \leqslant p < \infty$, blot er funktionen $t \longmapsto t^p$ nu konkav. Dermed er

$$|f+g|^p \geqslant (\alpha+\beta)^p (\lambda {f_0}^p + (1-\lambda){g_0}^p)$$

sådan at

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_0^1 |f+g|^p \geqslant \int_0^1 (\alpha+\beta)^p (\lambda {f_0}^p + (1-\lambda){g_0}^p) \\
&= \cdots = (\|f\|_p + \|g\|_p)^p,
\end{aligned}$$

hvorefter resultatet følger ved at tage den p-te rod på hver side.

Sætning 6.4 (Hölders ulighed) Hvis p og q er ikke-negative udvidede reelle tal med $1/p + 1/q = 1$ og $f \in L^p$ og $g \in L^q$, så er $fg \in L^1$ og

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Nævnes blot, bevises ikke?

Rummet L^2 er indeholdt i L^1 Der gælder ægte inklusion, altså $L^2 \subsetneq L^1$.

Da 2 er Hölderkonjugeret med sig selv så får vi for $f \in L^2$ og $1 \in L^2$ at $(f \cdot 1) = f \in L^1$. Ydermere har vi, at $f(x) = 1/\sqrt{x}$ ligger i L^1 men ikke i L^2 idet

$$\int_0^1 |1/\sqrt{x}|\,dx = [2\sqrt{x}]_{x=0}^1 = 2 \quad \text{mens}$$

$$\int_0^1 |1/x|\,dx = [\ln x]_{x=0}^1 = \infty.$$

Det viser, at $L^2 \subsetneq L_1$.

10 Fuldstændighed af L^p-rum

Definition af L^p og $\|f\|_p$ Vi betegner mængden af alle målelige funktioner f der opfylder

$$\int_0^1 |f|^p < \infty$$

med L^p.

For $f \in L^p$ lader vi $\|f\|_p$ betegne det ikke-negative reelle tal

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}.$$

Definition af konvergens Vi siger, at følgen $\{f_n\}$ konvergerer mod f i p*-middel* hvis $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$.

Definition af fuldstændighed Hvis enhver Cauchy-følge i et normerede vektorrum X er konvergent, da siges X at være et *fuldstændigt* rum. Et fuldstændigt vektorrum kaldes også et *Banachrum*.

Proposition 6.5 Et normeret vektorrum X er fuldstændigt hvis og kun hvis enhver absolut summabel række er summabel, altså hvis

$$\sum \|f_n\| < \infty \Longrightarrow \sum f_n < \infty.$$

Nævnes blot, bevises ikke.

Sætning 6.6 (Riesz-Fischer) L^p-rummene er fuldstændige.

I tilfældet $p = \infty$ betegner $\|f\|_\infty$ det essentielle supremum af værdimængden for f sådan at $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ næsten overalt. Lad nu $\{f_n\}$ være en følge i L^∞ med $\sum \|f_n\|_\infty < \infty$.

Da har vi at

$$\left|\sum f_n\right| \leqslant \sum |f_n| \leqslant \sum \|f_n\|_\infty < \infty$$

næsten overalt idet undtagelsesmængden er en tællelig forening af undtagelsesmængderne $\{x \mid f_n(x) > \|f_n\|_\infty\}$. Vi ser, at funktionen $\sum f_n$ er begrænset af det endelige tal $\sum \|f_n\|_\infty$ næsten overalt. Dermed er $\sum f_n$ begrænset næsten overalt og ligger derfor i L^∞.

I det almindelige tilfælde med $1 \leqslant p < \infty$ ser vi på en følge $\{E_k\}$ i L^p med $\sum \|f_k\|_p = M < \infty$. Definér g_n ved

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$$

Vi har da defineret en ikke-negativ funktion hvor

$$\|g_n\|_p = \left\|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = M.$$

Da $\{g_n(x)\}$ er en voksende følge er den konvergent mod et udvidet reelt tal $g(x)$ med $0 \leqslant g(x) \leqslant \infty$, begge ydrepunkter er mulige. Funktionen g er grænsefunktion af en række målelige funktioner (g_n er målelig da den er summen af de målelige $|f_k|$) og er dermed selv målelig. Fatous lemma giver da at

$$\int g^p \leqslant \liminf \int (g_n)^p = \liminf \|g_n\|_p^p \leqslant M^p$$

hvormed g^p er integrabel sådan at $g < \infty$ næsten overalt. Vi definerer nu funktionen s ved

$$s(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k & g(x) < \infty, \\ 0 & g(x) = \infty. \end{cases}$$

Når $g(x) = \sum |f_k| < \infty$ er rækken $\sum f_k$ absolut summabel, og da $\mathbb{R}$ er fuldstændigt er enhver absolut summabel række summabel. Funktionen s er derfor endelig overalt.

Da s næsten overalt er grænsefunktionen af de målelige afsnitssummer s_n givet ved $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ er s selv målelig. Desuden er

$$|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k| = g_n \leqslant g$$

og dermed er $|s| \leqslant g$ og $s \in L^p$. Vi mangler nu blot at vise, at den oprindelige række $\sum f_k = \lim s_n$ har sum s.

Til det formål ser vi på afstanden mellem s og s_n i et punkt og får

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s(x)|^p &\leqslant \big(|s_n(x)| + |s(x)|\big)^p \\ &\leqslant (g(x) + g(x))^p = 2^p g(x)^p. \end{aligned}$$

Da g^p er integrabel er $2^p g^p$ også integrabel og dermed er $|s_n(x) - s(x)|^p$ integrabel. Desuden går $|s_n(x) - s(x)|^p$ mod 0 for næsten alle x, da $s_n(x)$ går imod $s(x)$ undtagen på den nulmængde hvor $g(x) = \infty$. Lebesgues konvergenssætning kan nu bruges og giver

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int |s_n - s|^p = \int 0 = 0.$$

Vi har dermed at $\|s_n - s\|^p \longrightarrow 0$ og derfor også at $\|s_n - s\| \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$. Da $\sum f_k = \lim s_n$ så har vi nu vist at summen har værdien s i L^p. Dermed er L^p fuldstændig da enhver absolut summabel række er summabel.

11 Approksimation i L^p

Definition af konvergens Vi siger, at følgen $\{f_n\}$ konvergerer mod f i *p-middel* hvis $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$.

Da $\|f_n - f\|_p \geqslant |\|f_n\|_p - \|f\|_p|$, så vil konvergens i p-middel medføre konvergens af p-normerne: $\|f_n\|_p \longrightarrow \|f\|_p$.

Lemma 6.7 Givet $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$ og $\varepsilon > 0$ så findes der en begrænset målelig funktion f_M med $|f_M| \leqslant M$ og $\|f - f_M\|_p < \varepsilon$

Vi bruger lodret afskæring, og definerer f_N ved

$$f_N(x) = \begin{cases} N & N < f(x), \\ f(x) & -N \leqslant f(x) \leqslant N \\ -N & f(x) < -N. \end{cases}$$

Så er $|f_N| = N$ og $f_N \longrightarrow f$ næsten overalt idet f er begrænset næsten overalt fordi $f \in L^p$ sådan at $\int_0^1 |f|^p < \infty$.

Konvergensen betyder, at $|f - f_N|^p \longrightarrow 0$ og da $|f - f_N|^p \leqslant |f|^p$ hvor f er integrabel, så er $f - f_N$ også integrabel. Dermed er

$$\|f - f_N\|_p^p = \int_0^1 |f - f_N|^p \longrightarrow 0$$

og f_N er dermed konvergent i p-middel med grænse f. Der findes derfor et M sådan at $\|f - f_M\|_p < \varepsilon$.

Proposition 6.8 Givet $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$ og $\varepsilon > 0$ så findes der en trappefunktion ϕ sådan at $\|f - \phi\|_p < \varepsilon$.

Vi bruger approksimation i to trin. Først vælger vi en begrænset målelig funktion f_M sådan at $\|f - f_M\|_p < \varepsilon/2$. Vi ved fra tidligere (proposition 3.22) at der findes en trappefunktion ϕ med $|\phi| \leqslant f_M$ sådan at

$$|f_M - \phi| < \left(\frac{\varepsilon}{8M}\right)^p \leqslant \frac{\varepsilon}{8M} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

undtagen på en mængde E med $m(E) = \delta$ hvor

$$\delta < \left(\frac{\varepsilon}{8M}\right)^p$$

Vi har nu at

$$\begin{aligned}
\|f_M - \phi\|_p^p &= \int_0^1 |f_M - \phi|^p \\
&= \int_{[0,1]\sim E} |f_M - \phi|^p + \int_E |f_M - \phi|^p \\
&\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p + (2M)^p \left(\frac{\varepsilon}{8M}\right)^p = \frac{\varepsilon^p}{4^p} + \frac{\varepsilon^p}{4^p} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\|f - \phi\|_p \leqslant \|f - f_M\|_p + \|f_M - \phi\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

12 Målrum og målelige funktioner

Definition af et måleligt rum Vi kalder et par $(X, \mathcal{B})$ for et *måleligt rum* når $\mathcal{B}$ er en σ-algebra over X. Mængder i $\mathcal{B}$ kaldes *målelige*

Definition af et mål En ikke-negativ funktion μ kaldes et *mål* hvis den er defineret på en σ-algebra $\mathcal{B}$ og opfylder at $\mu(\emptyset) = 0$ samt at

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

for enhver følge $\{E_i\}$ af parvis disjunkte mængder fra $\mathcal{B}$. Denne egenskab kaldes *tællelig additivitet*.

Definition af målrum En tripel $(X, \mathcal{B}, \mu)$ kaldes et *målrum* når $\mathcal{B}$ er en σ-algebra over X og μ er et mål på $\mathcal{B}$.

Proposition 11.1 For et vilkårligt mål μ gælder, at $A \subseteq B \implies \mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Da vi kan skrive B som en disjunkt forening af A og $B \sim A$, så er $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \sim A)$ og dermed også $\mu(B) \geqslant \mu(A)$.

Proposition 11.2 (Kontinuitet i $\emptyset$) For en aftagende følge $E_i \supseteq E_{i+1}$ i $\mathcal{B}$ med $\mu(E_1) < \infty$ gælder, at

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \lim_{i \longrightarrow \infty} \mu(E_i).$$

Da $E_i \supseteq E_{i+1}$ så er $\mu(E_i) \geqslant \mu(E_{i+1})$ og dermed er følgen aftagende. Den er desuden nedad begrænset af 0 og dermed konvergent. Vi sætter $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ og kan så skrive E_1 som en disjunkt forening

$$E_1 = E \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \sim E_{i+1}).$$

Da μ er tællelig additivt, så er

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \sim E_{i+1}).$$

Idet vi kan skrive E_i som en disjunkt forening af $E_i \sim E_{i+1}$ og E_{i+1}, så er $\mu(E_i) - \mu(E_{i+1}) = \mu(E_i \sim E_{i+1})$. Her er antagelsen om at $\mu(E_1) < \infty$ vigtig, da vi ellers ikke kunne trække $\mu(E_1)$ fra. Vi får nu, at

$$\begin{aligned}\mu(E_1) &= \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) - \mu(E_{i+1}) \\ &= \mu(E) + \mu(E_1) - \lim_{i \longrightarrow \infty} \mu(E_i).\end{aligned}$$

da rækken er en alternerende sum. Når $\mu(E_1)$ trækkes fra og grænseværdien flyttes over på den anden side står resultatet der.

Definition af fuldstændigt målrum Et målrum $(X, \mathcal{B}, \mu)$ siges at være *fuldstændigt* hvis alle delmængder af nulmængder er måleligt, altså hvis $A \subseteq B$ med $B \in \mathcal{B}$ medfører, at $A \in \mathcal{B}$.

Definition af målelig funktion En funktion f kaldes *målelig* hvis der for alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$\{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}.$$

Den skarpe ulighed er ækvivalent med en blød ulighed og uligheden kan vendes. Eksempelvis er $\{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ komplimentærmængden til $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ og de vil derfor begge ligge i $\mathcal{B}$ hvis blot den ene gør det da $\mathcal{B}$ er en σ-algebra.

Proposition 11.8 Hvis μ er et fuldstændigt mål, og $f = g$ næsten overalt hvor f er en målelig funktion, så er g målelig.

Vi sætter $E = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, vores antagelse er, at $\mu(E) = 0$. Vi får nu

$$\begin{aligned}\{x \mid g(x) > \alpha\} = \Big(\{x \mid f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E \mid g(x) > \alpha\}\Big) \\ \sim \{x \in E \mid g(x) \leqslant \alpha\}.\end{aligned}$$

Den første mængde er målelig da f er en målelig funktion, og de to sidste mængder er delmængder af E og dermed begge målelige da μ er et fuldstændigt mål.

13 Integration over målrum

Definition af integral af simpel funktion Hvis ϕ er en ikke-negativ simpel funktion, da definerer vi integralet af ϕ hen over en målelig mængde E ved

$$\int_E \phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap E),$$

når ϕ er givet ved

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}.$$

Definition af integral af ikke-negativ funktion Lad f være en målelig, ikke-negativ, udvidet reel funktion f fra et målrum $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Da definerer vi *integralet* af f ved

$$\int f = \sup_{0 \leqslant \phi \leqslant f} \int \phi,$$

hvor ϕ varierer over alle simple funktioner $0 \leqslant \phi \leqslant f$.

Sætning 11.11 (Fatous lemma) Lad $\{f_n\}$ være en følge af ikke-negative målelige funktioner i et målrum. Hvis f_n går mod en funktion f næsten overalt på en mængde E, så er

$$\int_E f \leqslant \liminf \int_E f_n.$$

Da funktionsværdierne på en nulmængde ikke påvirker integralet kan vi antage, at $f_n \longrightarrow f$ overalt på E. Idet $\int_E f$ er et supremum over alle simple funktioner $\phi \leqslant f$ er det nok at vise, at $\int_E \phi \leqslant \liminf \int_E f_n$ for alle simple funktioner $\phi \leqslant f$. Lad derfor $0 \leqslant \phi \leqslant f$ være en vilkårlig ikke-negativ simpel funktion.

Hvis $\int_E \phi = \infty$ findes der en mængde $A \subseteq E$ med $\mu(A) = \infty$ hvor $\phi > a > 0$, da en simpel funktion ϕ altid er begrænset. Vi sætter nu $A_n = \{x \in E \mid \forall k \geqslant n : f_k(x) > a\}$. Da er A_n en tællelig forening af målelige mængder og er derfor selv målelig. Desuden er følgen $\{A_n\}$ voksende da kravet $\forall k \geqslant n : f_k(x) > a$ lempes når n vokser. Da $\phi \leqslant \lim f_n$, så vil der for et stort nok k gælder, at $f_n(x) > \phi(x) > a$ for alle $n \geqslant k$. Dermed er $A \subseteq \bigcup A_n$ så der findes et A_k med $\mu(A_k) = \infty$ da $A \subseteq A_k$.

Da $\int_E f_n \geqslant \int_{A_n} \phi \geqslant a\mu(A_n) = \infty$ så er også $\lim \int_E f_n = \infty = \int_E \phi$.

I det almindelige tilfælde hvor $\int_E \phi < \infty$ er mængden $A = \{x \in E \mid \phi(x) > 0\}$ målelig da ϕ er en målelig funktion. Da ϕ er begrænset af M får vi at $\mu(A) < \infty$. For et $\varepsilon > 0$ sætter vi

$$A_n = \{x \in E \mid \forall k \geqslant n : f_k(x) > (1-\varepsilon)\phi(x)\}.$$

Som før, så er $\{A_n\}$ en voksende følge da kravet lempes når n vokser, og $A \subseteq \bigcup A_n$ da $f_n(x)$ bliver større end $(1-\varepsilon)\phi(x)$ når n bliver tilstrækkelig stor.

Følgen $\{A \sim A_n\}$ bliver så en aftagende følge med $\bigcap(A \sim A_n) = \emptyset$ da $A \subseteq A_n$ for store n. Sætningen om kontinuitet i $\emptyset$ siger så, at $\lim \mu(A \sim A_n) = 0$ og vi kan derfor finde et k sådan at $\mu(A \sim A_n) < \varepsilon$ for alle $n \geqslant k$. For $n \geqslant k$ får vi først at

$$\int_E f_k \geqslant \int_{A_k} f_k \geqslant (1-\varepsilon) \int_{A_k} \phi.$$

Da $\phi = 0$ på $E \sim A$, så er $\int_E \phi = \int_A \phi = \int_{A \sim A_k} \phi + \int_{A_k} \phi$. Idet $1 - \varepsilon < 1$ så får vi at

$$\begin{aligned}
\int_E f_k &\geqslant (1-\varepsilon) \int_{A_k} \phi \\
&= (1-\varepsilon) \int_E \phi - (1-\varepsilon) \int_{A \sim A_k} \phi \\
&\geqslant (1-\varepsilon) \int_E \phi - \int_{A \sim A_k} \phi \\
&\geqslant \int_E \phi - \varepsilon\Big(\int_E \phi + M\Big).
\end{aligned}$$

Her er højresiden gjort uafhængig af k så når vi tager limes inferior på venstresiden, så gælder uligheden stadig og

$$\liminf \int_E f_n \geqslant \int_E -\varepsilon\Big(\int_E \phi + M\Big).$$

Da ε var vilkårlig, så får vi at

$$\liminf \int_E f_n \geqslant \int_E \phi.$$

Vi har nu vist at $\liminf \int_E f_n \geqslant \int_E \phi$ for alle simple funktioner $\phi \leqslant f$. Uligheden bevares når vi tager supremum over alle simple funktioner der domineres af f, så $\liminf \int_E f_n \geqslant \sup \int_E \phi = \int_E$.

Sætning 11.12 (Monoton konvergens) Lad $\{f_n\}$ være en følge af ikke-negative, målelige funktioner der konvergerer næsten overalt til en funktion f og antag, at $f_n \leqslant f$ for alle n. Da er

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Bemærk, at der ikke er noget krav om at f_n skal være en monoton følge, de skal blot være opad begrænset af f.

Da $f_n \leqslant f$ er $\int f_n \leqslant \int f$ idet der for enhver simpel funktion $\phi \leqslant f_n$ gælder at $\phi \leqslant f$. Men Fatous lemma giver også, at $\int f \leqslant \liminf \int f_n$ så

$$\int f \leqslant \liminf \int f_n \leqslant \limsup \int f_n \leqslant \int f$$

og dermed er $\liminf \int f_n = \limsup \int f_n = \lim f_n = \int f$.

14 Ydre mål — μ^*-målelige mængder

Definition af ydre mål Vi kalder en mængdefunktion μ^* for et *ydre mål* hvis den er defineret på alle delmængder af en grundmængde X, er 0 på den tomme mængde, monoton og tællelig subadditiv:

$$\mu^*(\emptyset) = 0,$$
$$A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) \quad \text{og}$$
$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Definition af målelig mængde Vi siger at mængden E er *målelig* hvis der for alle $A \subseteq X$ gælder, at

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E}).$$

På grund af subadditiviteten er det altid nok at vise, at

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E}).$$

Sætning 12.1 Mængden af μ^*-målelige mængder $\mathcal{B}$ er en σ-algebra.

Da $\mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap \widetilde{\emptyset}) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A) = \mu^*(A)$ så er $\emptyset$ målelig. På grund af symmetrien i definitionen, så er $\widetilde{\emptyset} = X$ også målelig. Lad nu E_1 og E_2 være to målelig mængder.

Da E_2 er målelig får vi at

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap \widetilde{E_2})$$

og da E_1 er målelig, så er

$$\mu^*(A \cap \widetilde{E_2}) = \mu^*(A \cap \widetilde{E_2} \cap E_1) + \mu^*(A \cap \widetilde{E_2} \cap \widetilde{E_1})$$

sådan at

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap \widetilde{E_2} \cap E_1) + \mu^*(A \cap \widetilde{E_2} \cap \widetilde{E_1}).$$

Med omskrivningen

$$A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_2) \cup (A \cap E_1 \cap \widetilde{E_2})$$

af $A \cap (E_2 \cup E_2)$ som en disjunkt forening får vi at

$$\mu^*(A) = \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + \mu^*(A \cap \widetilde{E_2} \cap \widetilde{E_1}).$$

hvor $A \cap \widetilde{E_1} \cap \widetilde{E_2} = A \cap (E_1 \cup E_2)^{\sim}$. Dermed er $E_1 \cup E_2$ målelig og dermed også enhver endelig forening af målelige mængder. Dette viser, at $\mathcal{B}$ er en algebra.

Lad nu $\{E_i\}$ være en følge af parvis disjunkte, målelige mængder. Definér G_n og E ved

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{og} \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Da er $G_n \subseteq E$ sådan at $\tilde{E} \subseteq \widetilde{G_n}$ og da $E_i \cap E_j = \emptyset$ for $j \neq i$ er

$$G_n \cap E_n = E_n \quad \text{og} \quad G_n \cap \widetilde{E_n} = G_{n-1}.$$

Da E_n er målelig, så fås ved induktion at

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap G_n) &= \mu^*(A \cap G_n \cap E_n) + \mu^*(A \cap G_n \cap \widetilde{E_n}) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap G_{n-1}) \\ &= \cdots = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i).\end{aligned}$$

Mængderne G_n er alle målelige da de er en endelig forening af målelige mængder. Derfor er

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap \widetilde{G_n}).$$

Da $\tilde{E} \subseteq \widetilde{G_n}$ er $A \cap \tilde{E} \subseteq A \cap \widetilde{G_n}$ og da $A \cap E = \bigcup(A \cap E_i)$ er $A \cap E$ specielt også en delmængde af $\bigcup(A \cap E_i)$. Vi får derfor at

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap \widetilde{G_n}) \\ &\geqslant \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap E_i)\Big) + \mu^*(A \cap \tilde{E}) \\ &\geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E}).\end{aligned}$$

Da μ^* er subadditiv gælder der altid $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E})$ og vi har dermed vist lighed, hvilket betyder at E er målelig.

15 Carathéodorys udvidelsessætning

Definition af mål på en algebra Vi kalder en ikke-negativ funktion μ defineret på en algebra $\mathcal{A}$ for et *mål på en algebra* hvis $\mu(\emptyset) = 0$ og

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

når $\{E_i\}$ er en disjunkt følge af mængder fra $\mathcal{A}$ med $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$.

Man ser, at et mål på en algebra kun adskiller sig fra et mål på en σ-algebra derved at man ikke har garanti for at en tællelig forening ligger i algebraen og derfor heller ikke kan kræve tællelig additivitet i dette tilfælde.

Definition af ydre mål Som ved definitionen af det ydre Lebesguemål definerer vi μ^* ved

$$\mu^*(E) = \inf_{E \subseteq \bigcup A_i} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

hvor $\{A_i\}$ varierer over alle tællelige overdækninger af E.

Det kan vises, at μ^* er et *ydre mål*, altså at μ^* er 0 på $\emptyset$, monoton og tællelig subadditiv. Vi siger, at μ^* er frembragt af μ.

Definition af $\mathcal{A}_\sigma$ og $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ Vi betegner mængden af alle tællelige foreninger af mængder fra $\mathcal{A}$ med $\mathcal{A}_\sigma$. Mængden af alle tællelige fællesmængder af mængder fra $\mathcal{A}_\sigma$ betegnes $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$.

Proposition 12.6 For ethvert $\varepsilon > 0$ og $E \in \mathcal{A}$ findes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ og $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ sådan at $E \subseteq A$ og $E \subseteq B$ samt

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon \quad \text{og} \quad \mu^*(B) = \mu^*(E).$$

Fra infimumet i definitionen af det ydre mål får vi, at der findes en følge $\{A_i\}$ fra $\mathcal{A}$ sådan at

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Dermed er $A = \bigcup A_i \in \mathcal{A}_\sigma$ da det er en tællelig forening og A opfylder på grund af subadditiviteten at $\mu(A) \leqslant \sum \mu(A_i) \leqslant \mu(E) + \varepsilon$.

Fra det vi netop har vist ved vi, at vi for ethvert $n \in \mathbb{N}$ kan finde en mængde $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ sådan at

$$E \subseteq A_n \quad \text{og} \quad \mu(A_n) \leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Sæt nu $B = \bigcap A_n$ sådan at $B \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ og $E \subseteq B$ da $E \subseteq A_n$ for alle n. Så er $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(B)$ og

$$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A_n) \leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{n}$$

da $B \subseteq A_n$ for alle n. Dermed er $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(E)$ og da vi den modsatte ulighed også gælder, så er $\mu^*(B) = \mu^*(E)$.

16 Konstruktion af produktmål

Måleligt rektangel Vi kalder $A \times B$ et *måleligt rektangel* hvis A og B er målelige mængder fra hver sin σ-algebra $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ hørende til målrummene $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Mængden af alle målelige rektangler betegnes $\mathcal{R}$.

Definition af semialgebra Vi kalder en mængde C for en *semialgebra* hvis $A, B \in C$ medfører, at $A \cap B \in C$ og hvis $A \in C$ medfører, at $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ hvor $\{A_i\}$ er en følge af parvis disjunkte mængder fra C.

Mængden af alle målelige rektangler, $\mathcal{R}$, og mængden af alle intervaller på $\mathbb{R}$ er to eksempler på en semialgebra.

Definition af λ Vi definerer mængdefunktionen λ ved

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

for $A \in \mathcal{A}$ og $B \in \mathcal{B}$.

Lemma 12.14 Lad $\{A_i \times B_i\}$ være en følge af parvis disjunkte, målelige rektangler med forening $A \times B$. Da er

$$\lambda(A \times B) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i \times B_i).$$

For et fastholdt $x_0 \in A$ ligger punktet (x_0, y) i netop ét rektangel $A_i \times B_i$ for hvert $y \in B$ idet rektanglerne er parvis disjunkte. Når y gennemløber B får vi derfor en række disjunkte mængder B_i med $\bigcup B_i = B$ svarende til de i hvor $x_0 \in A_i$.

Da ν er et mål på $\mathcal{B}$ så ν tællelig additiv og derfor er

$$\sum \nu(B_i)\chi_{A_i}(x) = \nu(B)\chi_A(x).$$

Sætningen om monoton konvergens har et korollar der nu kan bruges, da vi har en følge af begrænsede funktioner χ_{A_i}. Vi får

$$\sum\left(\int \chi_{A_i}(x)\,d\mu\right) = \int\left(\sum \chi_{A_i}(x)\right)d\mu = \int \chi_A(x)\,d\mu$$

og da $\int \chi_A = \mu(A)$ så er

$$\begin{aligned}\sum \nu(B_i)\mu(A_i) &= \sum \int \nu(B_i)\chi_{A_i}\,d\mu = \int \sum \nu(B_i)\chi_{A_i}\,d\mu \\ &= \int \nu(B)\chi_A\,d\mu = \nu(B)\int \chi_A\,d\mu = \nu(B)\mu(A).\end{aligned}$$

Udvidelse af $\mathcal{R}$ til $\mathcal{R}'$ og $\mathcal{S}$ Da funktionen λ er tællelig additiv, så ved vi fra tidligere (Proposition 11.7) at den kan udvides til et mål på en algebra $\mathcal{R}'$. Fra Carathéodorys sætning får vi en udvidelse af $\mathcal{R}'$ til en σ-algebra $\mathcal{S}$ hvor udvidelsen af λ bliver et fuldstændigt mål.

Dette fuldstændige mål betegnes $\mu \times \nu$. Hvis X og Y er σ-endelige så bliver $\mu \times \nu$ også σ-endelig.

Lemma 12.16 Lad E være en mængde i $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ med $(\mu \times \nu)(E) < \infty$. Da er funktionen g defineret ved

$$g(x) = \nu(E_x)$$

målelig og

$$\int_X g\,d\mu = (\mu \times \nu)(E).$$

Bevises ikke, men skal bruges til beviset af lemma 12.18.

Lemma 12.18 Lad E være en $(\mu \times \nu)$-målelig delmængde af $X \times Y$ med $(\mu\times\nu)(E) < \infty$. Så er E_x en ν-målelig mængde for næsten alle x og funktionen g defineret ved

$$g(x) = \nu(E_x)$$

er en μ-målelig funktion defineret for næsten alle x med

$$\int_X g\,d\mu = (\mu \times \nu)(E).$$

Da E er målelig med endeligt mål, så findes $F \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ sådan at $(\mu \times \nu)(F) = (\mu \times \nu)(E)$ og $E \subseteq F$. Sæt nu $G = F \sim E$ der så er målelig da både F og E er målelige. Da E har endeligt mål og da $\mu \times \nu$ er endelig additiv, så er

$$(\mu \times \nu)(G) = (\mu \times \nu)(F \sim E) = (\mu \times \nu)(F) - (\mu \times \nu)(E).$$

Da E og F har samme, endelige mål er $(\mu\times\nu)(G) = 0$. Lemma 12.17 giver nu at $\nu(G_x) = 0$ for næsten alle x og dermed er $\nu(E_x) = \nu(F_x) - \nu(G_x) = \nu(F_x)$ også for næsten alle x.

Altså er $g(x) = \nu(E_x) = \nu(F_x)$ for næsten alle x og da $F \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ så giver lemma 12.16 at g er målelig for næsten alle x. Fra samme lemma får vi at

$$\int g\,d\mu = (\mu \times \nu)(F) = (\mu \times \nu)(E).$$

17 Fubini og Tonellis sætninger

Sætning 12.19 (Fubini) Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ være to fuldstændige målrum og lad f være en integrabel funktion $X \times Y$. Da er funktionen $f_x(y) = f(x, y)$ defineret og integrabel for næsten alle x, funktionen

$$x \longmapsto \int_Y f(x, y)\,d\nu(y)$$

er integrabel på X og

$$\int_X \left(\int_Y f\,d\nu\right) d\mu = \int_{X\times Y} f\,d(\mu \times \nu).$$

På grund af symmetrien mellem X og Y, så fås endnu tre påstande.

Hvis sætningen gælder for alle ikke-negative funktioner f, så gælder den også for $-f$ på grund af integralets linearitet. Vi kan derfor nøjes med at vise sætningen for $f \leqslant 0$.

Vi ved fra lemma 12.18, at de tre påstande gælder når f er en karakteristisk funktion der forsvinder udenfor en mængde med begrænset mål. Vi har nemlig, at

$$g(x) = \nu(E_x) = \int \chi_{E_x}\, d\nu$$

er målelig og integrabel da lemmaet også giver, at

$$\int_X g(x)\, d\mu = (\mu \times \nu)(E)$$

hvor

$$\int_X g(x)\, d\mu = \int_X \left(\int_Y \chi_{E_x}(y)\, d\nu \right) d\mu = \int_X \left(\int_Y \chi_E(x,y)\, d\nu \right) d\mu$$

og

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_{X \times Y} \chi_E\, d(\mu \times \nu).$$

Da integralet er lineært gælder sætningen også for linearkombinationer af karakteristiske funktioner, altså for simple funktioner der forsvinder udenfor en mængde med endeligt mål.

En tidligere sætning giver, at der for enhver ikke-negativ målelig funktion findes en følge $\{\phi_n\}$ af ikke-negative simple funktioner hvor $\phi_n \longrightarrow f$ punktvist og $|\phi_n| \leqslant f$ sådan at ϕ_n er integrabel. Dermed er $(\mu \times \nu)(\{(x,y) \mid \phi_n(x,y) \neq 0\}) < \infty$ da ϕ_n ellers ikke ville have endeligt integral.

For fastholdt x vil $(\phi_n)_x(y) = \phi_n(x,y)$ gå punktvist mod $f_x(y)$. Funktionerne $(\phi_n)_x$ er målelige for alle n da de er simple, og derfor er grænsefunktionen f_x også målelig. Da f er integrabel er f begrænset næsten overalt, og derfor er også f_x begrænset for næsten alle x. Så f_x er integrabel på Y for næsten alle x.

Sætningen om monoton konvergens kan bruges da $(\phi_n)_x \leqslant f_x$ for alle n og giver

$$\begin{aligned}\int_Y f\, d\nu = \int_Y f_x\, d\nu &= \int_Y \lim (\phi_n)_x\, d\nu \\ &= \lim \int_Y (\phi_n)_x\, d\nu = \lim \int_Y \phi_n\, d\nu.\end{aligned}$$

Bruger vi sætningen igen får vi at

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f\, d\nu \right) d\mu &= \int_X \left(\lim \int_Y \phi_n\, d\nu \right) d\mu \\ &= \lim \int_X \left(\int_Y \phi_n\, d\nu \right) d\mu\end{aligned}$$

og da sætningen gælder for simple funktioner er

$$\lim \int_X \left(\int_Y \phi_n \, d\nu \right) d\mu = \lim \int_{X\times Y} \phi_n \, d(\mu \times \nu)$$

hvor $\phi_n \longrightarrow f$ sådan at vi ved at bruge sætningen en tredje gang får, at

$$\int_X \left(\int_Y f \, d\nu \right) d\mu = \lim \int_{X\times Y} \phi_n \, d(\mu \times \nu)$$
$$= \int_{X\times Y} \lim \phi_n \, d(\mu \times \nu) = \int_{X\times Y} f \, d(\mu \times \nu).$$

Sætning 12.20 (Tonelli) Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ være to σ-endelige målrum og lad f være en ikke-negativ målelig funktion på $X \times Y$.

Da er $f_x(y) = f(x,y)$ defineret og målelig for næsten alle x, funktionen

$$x \longmapsto \int_Y f(x,y) \, d\nu(y)$$

er målelig og

$$\int_X \left(\int_Y f \, d\nu \right) d\mu = \int_{X\times Y} f \, d(\mu \times \nu).$$

På grund af symmetrien mellem X og Y, så fås endnu tre påstande.

Beviset kører på helt samme måde som beviset for Fubinis sætning, blot er f ikke længere integrabel. Men det blev også kun brugt til at argumentere for, at ϕ_n forsvandt udenfor en mængde med endeligt mål. Når vi arbejder med to σ-endelige mål μ og ν, så er $\mu \times \nu$ også σ-endeligt, og så siger proposition 11.7 direkte, at vi kan vælge ϕ_n så de er 0 udenfor en mængde med begrænset mål.

18 Weierstraß' approksimationssætning

Definition af tæt underrum Vi siger at $A \subseteq B$ er *tæt* hvis der for alle $\varepsilon > 0$ og $b \in B$ findes et $a \in A$ så $\|a - b\| < \varepsilon$. Det er så vigtigt at specificere den norm man måler med.

Eksempler på tætte underrum er $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ med almindelig absolut værdi som norm og simple funktioner der forsvinder udenfor en mængde med endeligt mål i L^p med p-middel som norm for $p < \infty$.

Definition af $\|\cdot\|_\infty$ Vi definerer $\|f\|_\infty$ på $[a,b]$ ved

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \left| f(t) \right|.$$

Sætning 2.4 (Weierstraß' approksimationssætning) Mængden af polynomier på $[a, b]$ er tæt i rummet af kontinuert funktioner på $[a, b]$, $C([a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Det er nok at se på intervallet $[0, 1]$ for f er defineret på $[a, b]$, da betragter vi blot g på $[0, 1]$ defineret ved $g(x) = f((x-a)/(b-a))$. Hvis så q er et polynomium hvor $|q(t) - g(t)| < \varepsilon$ for $t \in [0, 1]$ så er $q((x - a)/(b - a))$ et polynomium på $[a, b]$ sådan at der for $t \in [a, b]$ gælder at

$$\left|q\left(\frac{t-a}{b-a}\right) - f(t)\right| = \left|q\left(\frac{t-a}{b-a}\right) - g\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon.$$

For f på $[0, 1]$ definerer vi polynomiet p_n ved

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}.$$

Da er p_n højst et n'te-grads polynomium.

Binomialformlen giver, at $1^n = (x + (1 - x))^n$ kan skrives som

$$1 = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}$$

så når vi ganger $f(x)$ ind på summen fås

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}.$$

Vi skal nu vurdere afstanden mellem f og p_n ned under ε. Trekantsuligheden generaliseret til $n + 1$ led giver

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j},$$

hvor de sidste faktorer er flyttet ud fra numerisktegnet da de er positive.

Summen splittes nu op i to summer S_1 og S_2 hvor $|x - j/n| \leqslant \delta$ i S_1 og $|x - j/n| > \delta$ i S_2 for et fast $\delta > 0$. Idet vi indfører betegnelsen $\omega_\delta(f)$ for den maksimale oscillation af f på et interval af bredde δ givet ved

$$\omega_\delta(f) = \sup_{\substack{x, x' \in [a,b] \\ |x - x'| \leqslant \delta}} |f(x) - f(x')|,$$

så fås for S_1

$$S_1 \leqslant \sum_{j=0}^{n} \omega_\delta(f)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}$$

$$= \omega_\delta(f)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j} = \omega_\delta(f).$$

Her brugte vi igen opskrivningen af $1 = (x + (1-x))^n$ ved hjælp af binomialformlen.

For S_2 vurderes $|f(x) - f(j/n)|$ op til $2M$ hvor $M = \|f\|_\infty \geqslant f(t)$ for alle $t \in [0,1]$. Samtidig laver vi vurderingen for $|x - j/n| > \delta$

$$1 = \left(\frac{1}{\delta}\delta\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{\delta}\left|x - \frac{j}{n}\right|\right)^2 = \left(\frac{1}{\delta}\left(x - \frac{j}{n}\right)\right)^2.$$

Vi får nu når vi trække $2M$ og $1/\delta^2$ udenfor summen

$$S_2 \leqslant \sum_{j=0}^{n} 2M\left(\frac{1}{\delta}\left(x - \frac{j}{n}\right)\right)^2\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}$$

$$= \frac{2M}{\delta^2}\sum_{j=0}^{n}\left(x - \frac{j}{n}\right)^2\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}$$

Man kan vise følgende lighed

$$\sum_{j=0}^{n}\left(x - \frac{j}{n}\right)^2 x^j(1-x)^{n-j} = \frac{x(1-x)}{n}$$

sådan at

$$S_2 \leqslant \frac{2M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{2M}{\delta^2}\frac{1}{4} = \frac{M}{2\delta^2 n}$$

idet $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ på $[0,1]$ og dermed er hele summen

$$\left|f(x) - p_n(x)\right| \leqslant S_1 + S_2 \leqslant \omega_\delta(f) + \frac{M}{2\delta^2 n}.$$

Da f er kontinuert på $[0,1]$ er den også uniformt kontinuert på $[0,1]$. Definitionen af uniform kontinuitet giver os et $\delta > 0$ sådan at $\omega_\delta(f) < \varepsilon/2$ for ethvert $\varepsilon > 0$. For dette δ vælger vi nu n så stor at $M/2\delta^2 n < \varepsilon/2$. Dermed er

$$\left|f(x) - p_n(x)\right| \leqslant \omega_\delta(f) + \frac{M}{2\delta^2 n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vi har nu konstrueret et polynomium der ligger ε tæt ved f og dermed er mængden af polynomier tæt i $C([a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

19 Ortogonalsystemer og ortonormalbaser

Definition af rum med indre produkt En funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle: H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ kaldes et *indre produkt* på H hvis den for alle $x, y, z \in H$ og $\lambda \in \mathbb{C}$ opfylder at

(a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

(b) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ og $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,

(c) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ og $\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$,

(d) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ og

(e) $x \neq 0 \Longrightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

Definition af norm Vi definerer $\|\cdot\|$ ved $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Det kan vises, at det giver en *norm* sådan at den opfylder trekantsuligheden, at $\|x\| = 0 \iff x = 0$ og så videre.

Da $|\langle x, y\rangle - \langle x, z\rangle| \leqslant \|x\|\|y - z\|$ på grund af Cauchy-Schwarz' ulighed er det indre produkt *kontinuert* i begge variable.

Regneregler for norm For $x, y \in H$ fås *cosinusrelationen* og *parallellogramloven* der siger at

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y\rangle) \quad \text{og}$$
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Definition af ortonormalsystem Vi kalder en mængde $\{e_1, e_2, \ldots\}$ i H af indbyrdes vinkelrette, normerede vektorer for et *ortonormalsystem*. Der skal altså gælde at $\langle e_i, e_j\rangle = 0 \iff e_i \perp e_j$ for $i \neq j$ og $\|e_i\| = \langle e_i, e_i\rangle = 1$ for alle i.

Sætning 2.6 (Bessels ulighed) Lad $\{e_n\}$ være et ortonormalsystem i H og $x \in H$ et vilkårligt element. Da gælder

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Sætning 2.6 (Parsevals ligning) Lad $\{e_n\}$ være et ortonormalsystem i H og $x \in H$ et vilkårligt element. Da gælder

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \iff x = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Sætning 2.12 Lad H være et komplekst vektorrum med et indre produkt med et ortonormalsystem $\{e_n\}$. Vi sætter $V = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots\}$. Da er følgende udsagn ækvivalente:

(a) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$ for alle $x \in H$,

(b) $x = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$ for alle $x \in H$ og

(c) Det mindste lukkede underrum som indeholder $\{e_n\}$ er lig H.

Hvis H er et Hilbertrum, da medfører disse tre egenskaber at $\{e_n\}$ er et maksimalt ortonormalsystem.

Vi beviser sætningen ved at se på et vilkårligt $x \in H$. Den første ækvivalens er givet ved Parsevals ligning.

Vi viser nu at $x \in \bar{V}$ når $x = \lim s_n = \lim \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Vi har at $s_n \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ og definitionen af $\bar{V}$ er netop at den indeholder alle konvergenspunkter for følger fra V så specielt indeholder den $x = \lim s_n$.

For at slutte den modsatte implikation skal vi først vurdere $x - s_n$ imod $x - y$ for et vilkårligt $y \in V_n$. Vi får først at

$$\langle s_n, e_i\rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j, e_i\Big\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle\langle x, e_j\rangle e_j, e_i\rangle = \langle e, e_i\rangle$$

så $\langle x - s_n, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle s_n, e_i\rangle = 0$. Derfor står $x - s_n$ vinkelret på e_i for alle i og da det indre produkt er lineært står $x - s_n$ vinkelret på alle $y \in V_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Fra Pythagoras får vi nu at

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|x - s_n + s_n - y\|^2 \\ &= \|x - s_n\|^2 + \|s_n - y\|^2 \geqslant \|x - s_n\|^2\end{aligned}$$

da $s_n - y$ ligger i V_n. Dermed er $\|x - y\| \geqslant \|x - s_n\|$.

Vi fører beviset kontrapositivt, sådan at vi viser at hvis en af de to første ligninger ikke holder, så er $x \notin \bar{V}$. Så vi antager at $x \neq \lim s_n$. Dermed er Parsevals ligning ikke opfyldt og Bessels ulighed giver nu, at

$$\|x\|^2 > \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \implies \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 = d^2 > 0.$$

Da $x - s_n$ står vinkelret på $s_n \in V_n$ så er

$$\|x\|^2 - \lim_{n\longrightarrow\infty} \|s_n\|^2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x - s_n\|^2 = \inf_n \|x - s_n\|^2$$

hvor vi til sidst kunne sætte grænseværdien lig infimum da følgen er aftagende idet $\|s_n\|$ er vokser når man tager flere led med. Da vi tager infimum over n, så er dette tal uafhængigt af n. Vi har nu at der for $y \in V_n$ gælder

$$\|x - y\| \geqslant \|x - s_n\| \geqslant \inf_n \|x - s_n\| = d > 0.$$

Dette gælder for alle n, så for $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty}$ gælder at $\|x - y\| \geqslant \inf_n \|x - s_n\| = d > 0$. Dermed kan y ikke ligge i $\bar{V}$.

Vi har nu vist, at de tre først udsagn gælder for for et vilkårligt $x \in H$, dermed gælder de for alle $x \in H$. Vi mangler nu at vise, at disse udsagn sammen med fuldstændigheden af H medfører, at $\{e_n\}$ er et maksimalt ortonormalsystem.

Antag derfor, for en modstrid, at det kan udvides til $\{f, e_1, \ldots\}$ og at denne udvidelse ikke er triviel, altså at $f \neq 0$. Da $f \in H$ så kan den udtrykkes ved hjælp af de mange e_i som

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Så $\{e_n\}$ kan ikke udvides. Antag nu omvendt at $\{e_n\}$ er et maksimalt ortonormalsystem og definer s ved

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$

for et vilkårligt $x \in H$. Denne række er konvergent da H er et Hilbertrum og da det indre produkt er kontinuert på $H \times H$, så er

$$\langle s, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$$

hvilket betyder at $s - x \perp e_i$ for alle i. Hvis nu $s \neq x$ så er $(s - x)/\|s - x\|$ en ny vektor der står vinkelret på alle andre e_i hvilket giver en modstrid da vi har antaget af $\{e_n\}$ er et maksimalt ortonormalsystem. Så $s = x$ og dermed har vi vist den ønskede implikation.

Definition af ortonormalbasis Et ortonormalsystem i et Hilbertrum kaldes en *ortonormalbasis* hvis det er maksimalt.

20 Sætningen om nærmeste punkt og projektionssætningen

Sætning 2.16 (Nærmeste punkt) Lad $M \subseteq H$ være en lukket konveks mængde i et Hilbertrum H. Da findes præcis ét punkt $y \in M$ for et givent $x \in H$ sådan at

$$\|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

Da $\|x - z\|$ er nedad begrænset af 0 findes $\inf \|x - z\| = d \geqslant 0$ for $z \in M$. Da d er et infimum, så findes der for ethvert n et $z_n \in M$ sådan at

$$d \leqslant \|x - z_n\| \leqslant d + \frac{1}{n}.$$

Vi viser af følgen $\{z_n\}$ er en Cauchyfølge da at se på z_n og z_m for $n, m \in \mathbb{N}$. Parallelogramloven giver nu at

$$\begin{aligned}
\|z_n - z_m\|^2 &= \big\|(z_n - x) - (z_m - x)\big\|^2 \\
&= 2\|z_n - x\|^2 + 2\|z_m - x\|^2 - \|x\| \\
&\qquad - \big\|(z_n - x) + (z_m - x)\big\|^2 \\
&= 2\|z_n - x\|^2 + 2\|z_m - x\|^2 \\
&\qquad - 4\big\|\tfrac{1}{2}(z_n + z_m) - x\big\|^2 \\
&\leqslant 2\Big(d + \frac{1}{n}\Big)^2 + 2\Big(d + \frac{1}{m}\Big)^2 - 4d^2 \\
&\leqslant 4\Big(d + \frac{1}{\min(n, m)}\Big)^2 - 4d^2
\end{aligned}$$

hvor vi ved næstsidste vurdering benyttede, at M er et underrum sådan at $\frac{1}{2}(z_n + z_m)$ ligger i M.

Vi ser, at $\|z_n - z_m\|^2$ går mod 0 for $\min(n, m) \longrightarrow \infty$ hvilket betyder at $\{z_n\}$ er en Cauchyfølge. Da H er et Hilbertrum findes $y = \lim z_n$, og da M er lukket så ligger y i M. Kontinuiteten af normen giver

$$\begin{aligned}
d \leqslant \|x - y\| &= \|x - \lim z_n\| \\
&= \lim \|x - z_n\| = \lim\Big(d + \frac{1}{n}\Big) = d,
\end{aligned}$$

hvilket viser, at $y = \lim z_n$ virkelig er det nærmeste punkt.

At y er entydig vises ved et modstridsbevis. Lad y' være endnu et punkt med $\|x - y'\| = d$. Parallelogramloven giver igen at

$$\begin{aligned}
\|y - y'\|^2 &= \big\|(y - x) - (y' - x)\big\|^2 \\
&= 2\|y - x\|^2 + 2\|y' - x\|^2 - \big\|(y - x) + (y' - x)\big\|^2 \\
&= 2\|y - x\|^2 + 2\|y' - x\|^2 - 4\big\|\tfrac{1}{2}(y + y') - x\big\|^2 \\
&\leqslant 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 \leqslant 0
\end{aligned}$$

sådan at $\|y - y'\| = 0$ hvilket viser at y er entydig.

Sætning 2.17 (Projektionssætningen) Lad $M \subseteq H$ være et lukket underrum. Da er H en direkte sum af M og $M^{\perp}$ sådan at ethvert $x \in H$ kan skrives på entydig vis som

$$x = y + z$$

hvor $y \in M$ og $z \in M^{\perp}$.

Lad $x \in H$ være givet og lad $y \in M$ være det nærmeste punkt for x i M. Da ethvert underrum er konveks, så er y valgt entydigt. Da gælder

$$\Re\langle z - y, x - y\rangle \leqslant 0 \quad \forall z \in M.$$

For et vilkårligt $u \in M$ fås med $z = u + y$ at $\Re\langle u, x - y\rangle \leqslant 0$. Da det gælder for et vilkårligt $u \in M$ da gælder det også for λu hvor $\lambda \in \mathbb{C}$. Med $\lambda = -1$ fås

$$\langle -u, x - y\rangle = -\langle u, x - y\rangle \leqslant 0 \Longrightarrow \langle u, x - y\rangle = 0,$$

hvilket viser, at $x - y \in M^{\perp}$. Vi kan dermed skrive $x \in H$ som

$$x = y + (x - y)$$

hvor $y \in M$ og $x - y \in M^{\perp}$.

Denne opskrivning er entydig, thi hvis $x = y + z = y' + z'$ med $y, y' \in M$ og $z, z' \in M^{\perp}$ så får vi at

$$M \ni y - y' = z' - z \in M^{\perp}$$

sådan at alle fire elementer ligger i $M \cap M^{\perp}$. Men $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ idet et element $0'$ i fællesmængden opfylder at $\langle 0', x\rangle = 0$ for alle $x \in H$, så specielt har vi at $\langle 0', 0'\rangle = 0$ hvilket viser at $0' = 0$.

21 Duale rum

Definition af lineær operator Vi kalder en afbilding A fra et vektorrum X til Y en *lineær operator* hvis den opfylder at

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

for alle $x, y \in X$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definition af operatornorm Hvis der for en lineær operator A findes et tal M sådan at $\|A(x)\| \leqslant M\|x\|$ for alle $x \in X$ så siges A at være *begrænset*. Man kan vise, at begrænsethed er ensbetydende med kontinuitet.

Vi betegner det mindste sådanne M med $\|A\|$ der så er givet ved

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{||A(x)||}{\|x\|}.$$

Der gælder da $\|A(x)\| \leqslant \|A\| \, \|x\|$.

Proposition HLR 10.3 Rummet $\mathcal{B}$ af alle begrænsede lineære operatorer fra et vektorrum X til et vektorrum Y er selv et vektorrum. Hvis Y er fuldstændigt (et Banachrum), da er $\mathcal{B}$ også fuldstændigt.

Propositionen bevises ikke men den skal bruges senere.

Definition af duale rum Mængden af alle begrænsede lineære operatorer fra et vektorrum X til $\mathbb{C}$ kaldes det *duale rum til* X og betegnes X^*.

Sætning FN 3.1 (Riesz-Frechet) Lad H være et komplekst Hilbertrum og definér en afbilding $T_x \colon H \longrightarrow \mathbb{C}$ for ethvert $x \in H$ ved

$$T_x(y) = \langle y, x \rangle.$$

Da er T_x en kontinuert lineær operator. Afbildingen $T \colon H \longrightarrow H^*$ defineret ved

$$T(x) = T_x$$

giver da en afbilding af H på H^* der er isometrisk, surjektiv og konjugeret lineært.

Dermed kan enhver lineær operator f fra et vilkårligt komplekst Hilbertrum til $\mathbb{C}$ skrives som $f(y) = \langle y, x \rangle$ hvor x er entydigt bestemt ved f og $\|f\| = \|x\|$.

Det er klart at T_x er lineær da det indre produkt er lineært i først variabel. Fra Cauchy-Schwarz får vi at

$$\Big| ||T_x(y)|| - ||T_x(y')|| \Big| = |\langle y - y', x \rangle| \leqslant \|y - y'\| \, \|x\|$$

hvor $\|y - y'\| \longrightarrow 0$ når $y \longrightarrow y'$ idet normen er kontinuert. Dermed bliver T_x også kontinuert. Vi viser nu de tre egenskaber for T.

Først vises at T er isometrisk ved at vise, at T_x er isometrisk. Cauchy-Schwarz giver at

$$|T_x(y)| = |\langle y, x \rangle| \leqslant \|y\| \|x\|$$

for alle $y \in H$ og dermed er $\|T_x\| \leqslant \|x\|$. Omvendt får vi at

$$|T_x(x)| = |\langle x, x \rangle| = \|x\|^2 \leqslant \|T_x\| \, \|x\| \Longrightarrow \|x\| \leqslant \|T_x\|$$

sådan at $\|T_x\| = \|x\|$. Da er $\|T(x)\| = \|T_x\| = \|x\|$ og T er således isometrisk.

Dernæst viser vi at T er konjugeret lineær. Dette følger af at det indre produkt er konjugeret lineær i anden variabel. Vi får at

$$T(\lambda x + y) = T_{\lambda x+y}$$

hvor

$$T_{\lambda x+y}(z) = \langle z, \lambda x + y\rangle = \bar{\lambda}\langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle = T_{\bar{\lambda}x}(z) + T_y(z),$$

sådan at

$$T(\lambda x + y) = T_{\lambda x+y} = \bar{\lambda}T(x) + T(y).$$

Endelig viser vi at T er surjektiv ved for et $f \in H^*$ at finde et $x \in H$ så $f = T_x$. Hvis $f = 0$ så har vi at $T(0) = T_0 = f$, så vi antager nu at $f \neq 0$.

Da f er en begrænset lineær operator er den også kontinuert og således bliver $M = \ker f = \{x \in H \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ en lukket mængde da urbilledet af den lukkede mængde $\{0\}$ bliver en lukket mængde under en kontinuert funktion. Da $\{0\}$ er et underrum er M også et underrum. Projektionssætningen kan nu bruges så $H = M + M^\perp$.

Idet $f \neq 0$ så findes der et $z \in H$ så $f(z) \neq 0$ og dermed ligger $z \in M^\perp$. Desuden er $z \neq 0$ da det ellers ville ligge i $M \cap M^\perp$. Vi kan ydermere vælge z sådan at $f(z) = 1$ idet $M^\perp$ også er et underrum.

For et vilkårligt $y \in H$ får vi nu at

$$f\big(y - f(y)z\big) = f(y) - f(y)f(z) = f(y) - f(y) = 0$$

så $y - f(y)z \in M$ for alle y og er dermed ortogonal med z. Så

$$0 = \big\langle y - f(y)z, z\big\rangle = \langle y, z\rangle - f(y)\langle z, z\rangle$$

Isolerer vi $f(y)$ får vi

$$f(y) = \frac{\langle y, z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \langle y, z/\|z\|^2\rangle.$$

Vi har nu vist, at $T(y/\|z\|^2) = T_{y/\|z\|^2} = f$ hvilket betyder at T er surjektiv.

22 Foldning

Redefinition af L^1 Med det nye $L^1(-\alpha, \alpha)$ menes den gamle $L^1(-\infty, \infty)$ hvis $\alpha = \infty$, ellers menes de 2α-periodiske funktioner $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ hvis restriktion ligger i den gamle $L^1(-\alpha, \alpha)$.

Definition af foldningsintegral Lad f og g være funktioner i $L^1(-\alpha, \alpha)$. Da defineres *foldningsintegralet* $f * g$ ved

$$f * g(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-t)g(t)\, dt.$$

Når integralet eksisterer for næsten alle x i $(-\alpha, \alpha)$ siges *foldningen* af f og g at eksistere.

Sætning 4.1 Hvis f er en integrabel funktion på $\mathbb{R}$ og $h \in \mathbb{R}$ et vilkårligt reelt tal, så er

$$\int f(x)\, dx = \int f(x+h)\, dx = \int f(-x)\, dx.$$

Integralet er med andre ord translationsinvariant.

Bevises ikke, men beviset bygger på, at Lebesguemålet er translationsinvariant hvilket igen bygger på at hvis $\bigcup I_n$ overdækker E da overdækker $\bigcup (I_n + h)$ også $E + h$.

Lemma 4.2 Hvis $E \subseteq \mathbb{R}$ er Lebesguemålelig, da er mængderne

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \in E\} \quad \text{og} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in E\} \end{aligned}$$

begge Lebesguemålelige.

Sætningen nævnes blot men bevises ikke.

Sætning 4.3 Lad f og g være to integrable funktioner i $L^1(-\alpha, \alpha)$. Da eksisterer $f * g$ og $f * g \in L^1(-\alpha, \alpha)$. Desuden er

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_2$$

og

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (f * g)(x)\, dx = \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx \right) \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\, dx \right).$$

Vi sætter $K(x, y) = f(x-y)g(y)$ der kan opfattes som et produkt af $f'(x, y) = f(x-y)$ og $g'(x, y) = g(y)$ sådan at

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f'(x, y) > \alpha\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x - y) > \alpha\},$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g'(x, y) > \alpha\} = \mathbb{R} \times \{y \in \mathbb{R} \mid g(y) > \alpha\}.$$

Da f og g er målelige funktioner på $\mathbb{R}$, så giver lemmaet at de to superniveaumængder begge er målelige mængder, og dermed er f' og g' begge målelige funktioner på $\mathbb{R}^2$. Da K er et produkt af to målelige funktioner er K selv en målelig funktion.

Vi bruger nu Tonellis sætning til at vise at K er integrabel. Dernæst bruges Fubinis sætning til at vise at foldningsintegralet eksisterer. Først kan Tonellis sætning bruges på $|K|$ da K er målelig og vi får

$$\begin{aligned}
&\int_{(-\alpha,\alpha)\times(-\alpha,\alpha)} |K(x,y)|\, d(x,y) \\
&\quad = \int_{(-\alpha,\alpha)\times(-\alpha,\alpha)} |f(x-y)g(y)|\, d(x,y) \\
&\quad = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x-y)g(y)|\, dx\right) dy \\
&\quad = \int_{-\alpha}^{\alpha} |g(y)| \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x-y)|\, dx\right) dy \\
&\quad = \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-y)\, dx\right)\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} g(y)\, dy\right) \\
&\quad = \|f\|_1 \, \|g\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Dermed er K integrabel på $[-\alpha,\alpha]\times[-\alpha,\alpha]$.

Fubinis sætning kan nu bruges på K, og vi får at foldningsintegralet

$$(f * g)(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-y)g(y)\, dy$$

eksisterer for næsten alle x. Fubinis sætning giver også at foldningsintegralet $f * g$ er integrabel på $[-\alpha,\alpha]$ så

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_{-\alpha}^{\alpha}\left|\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-y)g(y)\, dy\right| dx \\
&\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x-y)g(y)|\, dy\right) dx \\
&= \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x-y)g(y)|\, dx\right) dy \\
&= \|f\|_1 \, \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Her brugte vi Fubinis sætning til at ombytte integrationsrækkefølgen i næstsidste trin sådan at vi kunne bruge ligheden fra den tidligere integration af $|K|$.

Endelig følger $\int (f * g)\,dx = (\int f\,dx)(\int g\,dx)$ ved at bruge Fubinis sætning på $f*g$. Det kan vi gøre idet vi nu ved at $f*g$ er integrabel. Ved at sætte g uden for integrationen tidligere fås vi nu at

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{\alpha} (f * g)\,dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-y)g(y)\,dy\right)dx\\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-y)g(y)\,dx\right)dy\\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} g(y)\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-y)\,dx\right)dy\\ &= \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-y)\,dx\right)\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} g(y)\,dy\right)\\ &= \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx\right)\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} g(y)\,dy\right).\end{aligned}$$

Til sidst benyttede vi at integralet er translationsinvariant.

23 Approksimerende enheder

Definition af approksimerende enhed En følge $\{k_n\}$ i $L^1(-\alpha,\alpha)$ kaldes en *approksimerende enhed* for $L^1(-\alpha,\alpha)$ hvis den opfylder

(a) $k_n \geqslant 0$ for alle n,

(b) $k_n \in L^1(-\alpha,\alpha) \cap L^\infty(-\alpha,\alpha)$ med $\int_{-\alpha}^{\alpha} k_n = 1$ for alle n,

(c) $\int_{|t|\geqslant\delta} k_n(t)\,dt \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$ for alle $\delta > 0$ og

(d) $\lim_{n\longrightarrow\infty} k_n(t) = 0$ uniformt for alle $\delta > 0$ med $\delta \leqslant |t|$.

Sætning 4.7 Hvis $\{k_n\}$ er en approksimerende enhed for $L^1(-\alpha,\alpha)$ og $f \in L^1(-\alpha,\alpha)$ er kontinuert i x_0 da er

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (f * k_n)(x_0) = x_0,$$

Hvis f er uniform kontinuert og begrænset på $\mathbb{R}$ så er

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f * k_n\|_\infty = \|f\|_\infty$$

hvilket vil sige at $\lim f * k_n = f$ uniformt på $\mathbb{R}$.

Vi vurderer afstanden mellem $(f * k_n)(x_0)$ og $f(x_0)$ så

$$\begin{aligned}|\,(f * k_n)(x_0) - f(x_0)\,| &= \left|\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x-t)k_n(t)\,dt - f(x_0)\right|\\ &= \left|\int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x-t) - f(x_0))k_n(t)\,dt\right|\end{aligned}$$

da $\int_{-\alpha}^{\alpha} k_n = 1$ sådan at $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x_0)k_n = f(x_0)$.

Vi vurderer nu opad ved at flytte numerisktegnet indenfor i integralet og splitter integralet op i to integraler alt efter om $|t|$ er større eller mindre end et fast $\delta > 0$. Altså er

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x-t) - f(x_0))k_n(t)\, dt \right| \\
&\qquad \leqslant \int_{|t|<\delta} \left| (f(x-t) - f(x_0))k_n(t) \right| dt \\
&\qquad\quad + \int_{|t|\geqslant\delta} \left| (f(x-t) - f(x_0))k_n(t) \right| dt.
\end{aligned}$$

I det første integral vurderer vi leddet $|f(x-t) - f(x_0)|$ op mod supremum over en uafhængig variabel s og da det er uafhængigt af t kan denne faktor flyttes udenfor. Tilbage står et lille integral over k_n. Dette vurderes op mod 1 da det er integralet over hele intervallet $[-\alpha, \alpha]$ og vi får

$$\begin{aligned}
&\int_{|t|<\delta} \left| (f(x-t) - f(x_0))k_n(t) \right| dt \\
&\qquad \leqslant \sup_{|s|<\delta} |f(x-s) - f(x_0)|.
\end{aligned}$$

Det andet integral vurderes op ved at bruge trekantsuligheden på $|f(x-t)-f(x_0)|$, dernæst ganges $k_n(t)$ ind på de to led og endelig splittes integralet op i to så

$$\begin{aligned}
&\int_{|t|\geqslant\delta} \left| (f(x-t) - f(x_0))k_n(t) \right| dt \\
&\qquad \leqslant \int_{|t|\geqslant\delta} |f(x-t)|k_n(t) + |f(x_0)|k_n(t)\, dt \\
&\qquad = \int_{|t|\geqslant\delta} |f(x-t)|k_n(t)\, dt + \int_{|t|\geqslant\delta} |f(x_0)|k_n(t)\, dt.
\end{aligned}$$

I det første integral vurderer vi $k_n(t)$ op mod supremum over en uafhængig variabel s sådan at det kan flyttes udenfor. Tilbage har vi et integral over $f(x-t)$. Da integralet er translationsinvariant kan dette vurderes op imod et integral over hele $[-\alpha, \alpha]$ hvilket så giver $\|f\|_1$. I det andet integral er $|f(x_0)|$ uafhængig af t og kan flyttes udenfor sådan at

$$\begin{aligned}
&\int_{|t|\geqslant\delta}\Big|(f(x-t)-f(x_0))k_n(t)\Big|\,dt\\
&\qquad\leqslant \int_{|t|\geqslant\delta}|f(x-t)|k_n(t)\,dt+\int_{|t|\geqslant\delta}|f(x_0)|k_n(t)\,dt.\\
&\qquad\leqslant \|f\|_1\sup_{|s|\geqslant\delta}k_n(s)+|f(x_0)|\int_{|t|\geqslant\delta}k_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Dermed bliver den oprindelige vurdering

$$\begin{aligned}
&|(f*k_n)(x_0)-f(x_0)|\\
&\qquad\leqslant \sup_{|s|<\delta}|f(x-s)-f(x_0)|\\
&\qquad\quad+\|f\|_1\sup_{|s|\geqslant\delta}k_n(s)+|f(x_0)|\int_{|t|\geqslant\delta}k_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Tager vi nu $\limsup_{n\longrightarrow\infty}$ på begge sider, så får vi at

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\longrightarrow\infty}|(f*k_n)(x_0)-f(x_0)|\\
&\qquad\leqslant \limsup_{n\longrightarrow\infty}\Big(\sup_{|s|<\delta}|f(x-s)-f(x_0)|\\
&\qquad\qquad\qquad+\|f\|_1\sup_{|s|\geqslant\delta}k_n(s)+|f(x_0)|\int_{|t|\geqslant\delta}k_n(t)\,dt\Big)\\
&\qquad=\sup_{|s|<\delta}|f(x-s)-f(x_0)|\\
&\qquad\quad+\limsup_{n\longrightarrow\infty}\Big(\|f\|_1\sup_{|s|\geqslant\delta}k_n(s)+|f(x_0)|\int_{|t|\geqslant\delta}k_n(t)\,dt\Big).
\end{aligned}$$

Fra definitionen af en approksimerende enhed får vi at

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\|f\|_1\sup_{|s|\geqslant\delta}k_n(s)=0$$

da $\|f\|_1<\infty$ idet f ligger i $L^1(-\alpha,\alpha)$. Vi får også at

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}|f(x_0)|\int_{|t|\geqslant\delta}k_n(t)\,dt=0.$$

Dermed er

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}|(f*k_n)(x_0)-f(x_0)|\leqslant\sup_{|s|<\delta}|f(x-s)-f(x_0)|$$

og da f er kontinuert i x_0 så går $f(x-s)$ mod $f(x_0)$ når δ og dermed også s går mod 0. Vi får da at

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \varliminf_{n\longrightarrow\infty} \big|(f * k_n)(x_0) - f(x_0)\big| \\ &\leqslant \limsup_{n\longrightarrow\infty} \big|(f * k_n)(x_0) - f(x_0)\big| \leqslant 0\end{aligned}$$

hvilket betyder at grænseværdien findes og

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (f * k_n)(x_0) = f(x_0).$$

Anden del af sætningen kræver en vurdering der er uafhængig af x_0. Vi får først som før at

$$\begin{aligned}&\big|(f * k_n)(x) - f(x)\big| \\ &\qquad \leqslant \int_{|t|<\delta} \Big|(f(x-t) - f(x))k_n(t)\Big|\,dt \\ &\qquad\quad + \int_{|t|\geqslant\delta} \Big|(f(x-t) - f(x))k_n(t)\Big|\,dt.\end{aligned}$$

Det første integral vurderes op som før mens det andet integral vurderes op ved at sætte $2\|f\|_\infty$ udenfor.

$$\begin{aligned}&\big|(f * k_n)(x) - f(x)\big| \\ &\qquad \leqslant \sup_{|s|<\delta} \Big|(f(x-s) - f(x))\Big| + 2\|f\|_\infty \int_{|t|\geqslant\delta} k_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Uligheden bevares når vi tager supremum over alle $x \in \mathbb{R}$ hvilket giver $\|\cdot\|_\infty$ på venstresiden. Vi benytter at det sidste led er uafhængigt af x og får

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|(f * k_n)(x) - f(x)\big| = \|f * k_n - f\|_\infty \\ &\qquad \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{|s|<\delta} \Big|(f(x-s) - f(x))\Big| + 2\|f\|_\infty \int_{|t|\geqslant\delta} k_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Vi tager nu limes superior på begge sider hvorved det sidste led forsvinder idet k_n er en approksimerende enhed sådan at integralet går mod 0 for $n \longrightarrow \infty$. Vi får at

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|f * k_n - f\|_\infty \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{|s|<\delta} \Big|(f(x-s) - f(x))\Big|.$$

Hvis f er uniform kontinuert, så går højresiden mod 0 når δ går mod 0^+ og dermed får vi at

$$0 \leqslant \varliminf_{n\longrightarrow\infty} \|f * k_n - f\|_\infty \leqslant \limsup_{n\longrightarrow\infty} \|f * k_n - f\|_\infty \leqslant 0,$$

hvormed grænseværdien findes og $\lim f * k_n = f$ uniformt på $\mathbb{R}$.

24 Konvergens af Fourierrækken

Definition af Fourierrække En trigonometrisk række af formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

hvor c_n har formen

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx$$

for et $f \in L^1(-\pi,\pi)$ kaldes en *Fourierrække*. Vi skriver

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Definition af afsnitssum Vi betegner den n'te afsnitssum i Fourierrækken for f med s_n så

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Definition af Dirichlets kerne Ved at regne på afsnitssummerne får vi

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt\right)e^{-ikx} \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}\,dt\right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}f(t)e^{ik(x-t)}\right)dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)dt
\end{aligned}$$

Hvis vi for $x \neq 0$ definerer $D_n(x)$ ved

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

da ser vi at $s_n = f * D_n$ da $D_n * f = f * D_n$. Følgen $\{D_n\}$ kaldes *Dirichlets kerne*. Det ses, at D_n er lige da vi summerer over et symmetrisk interval omkring 0 sådan at både e^{ikx} og e^{-ikx} optræder i summen.

Sætning 5.6 Lad f være en udvidet 2π-periodisk funktion i $L^1(-\pi,\pi)$ og lad $x_0 \in \mathbb{R}$ være et kontinuitetspunkt for f hvor funktionen

$$t \longmapsto \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t}$$

er integrabel på intervallet $[-\pi,\pi]$. Da konvergerer Fourierrækken for f punktvist mod f i x_0 så

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n(x_0) = f(x_0).$$

Sætningen bevises ikke men skal bruges i beviset af sætning 5.8.

Sætning 5.8 Lad f være en udvidet 2π-periodisk funktion i $L^1(-\pi,\pi)$ og lad $x_0 \in \mathbb{R}$ være et punkt hvor grænseværdierne $f({x_0}^-)$ og $f({x_0}^+)$ findes. Hvis funktionen

$$t \longmapsto \frac{f(x_0 + t) - f({x_0}^+)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f({x_0}^-)}{t}$$

er integrabel på intervallet $[-\pi,\pi]$ så konvergerer Fourierrækken for f punktvist mod gennemsnittet af de to grænseværdier så

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n(x_0) = \tfrac{1}{2}\left(f({x_0}^-) + f({x_0}^+)\right).$$

Vi bruger opskrivningen $s_n = f * D_n$ og får

$$\begin{aligned}
s_n(x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t)D_n(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{0} f(x_0 - t)D_n(t)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x_0 - t)D_n(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} f(x_0 + t)D_n(t)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x_0 - t)D_n(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} \left(f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right)D_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Da integranden er en lige funktion, så vil integralet fra $-\pi$ til 0 have same værdi og integralet over $[-\pi,\pi]$ bliver derfor dobbelt så stort. Det korrigerer vi og får

$$s_n(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right)D_n(t)\,dt.$$

Dette integral kan skrives som $(g * D_n)(0)$ hvor $g(x) = \frac{1}{2}(f(x_0 + x) + f(x_0 - x)$ for $x \neq 0$. Vi sætter $g(0) = \frac{1}{2}(f({x_0}^+ + f({x_0}^-)$ sådan at g er kontinuert i 0 fordi vi har antaget, at grænseværdierne $f({x_0}^-)$ og $f({x_0}^+)$ findes.

Sætning 5.6 kan nu bruges fordi vi har antaget at funktionen

$$t \longmapsto \frac{f(x_0 + t) - f(x_0{}^+)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0{}^-)}{t}$$

er integrabel, og denne funktion er lig $t \longmapsto (g(0-t) - g(0))/t$.

25 Cesarosummabilitet af Fourierrækken

Definition af afsnitsmiddelsummer Vi definerer σ_n ved

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x),$$

hvor s_n er det n'te symmetriske afsnit i Fourierrækken for f.

Definition af Fejers kerne Idet integralet er lineært bliver foldningen også lineær så vi sætter

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x)\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (f * D_k)(x) = (f * F_n)(x)\end{aligned}$$

så $F_n = (1/(n+1))\sum_{k=0}^{n} D_k$ og kalder følgen $\{F_n\}$ for *Fejers kerne.* Da D_k er lige for alle k bliver F_n også lige.

Det kan vises, at F_n er en approksimerende enhed for $L^1(-\pi,\pi)$.

Sætning 5.10 Lad $f \in L^1(-\pi,\pi)$ have Fourierkoefficienterne $\{c_n\}$. Da gælder

(a) Hvis $x_0 \in \mathbb{R}$ er et kontinuitetspunkt for f, så er

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0).$$

(b) Hvis $f(x_0{}^-)$ og $f(x_0{}^+)$ eksisterer, så er

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n(x_0) = \tfrac{1}{2}\left(f(x_0{}^-) + f(x_0{}^+)\right)$$

(c) Hvis f er kontinuert så er

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n = f$$

uniformt på $\mathbb{R}$.

Hvis f er kontinuert i x_0, da giver sætning 4.7 at $(f * F_n)(x_0) \longrightarrow f(x_0)$ sådan at

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n(x_0) = \lim_{n\longrightarrow\infty} (f * F_n)(x_0) = f(x_0).$$

Hvis vi antager at $f({x_0}^-)$ og $f({x_0}^+)$ eksisterer, så kan vi lave en funktion g sådan at $\sigma_n(x) = (g * F_n)(0)$. Idet F_n er lige får vi

$$\begin{aligned}
s_n(x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t)F_n(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{0} f(x_0 - t)F_n(t)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x_0 - t)F_n(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} f(x_0 + t)F_n(t)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x_0 - t)F_n(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t))F_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Da integranden er en lige funktion, så vil integralet fra $-\pi$ til 0 have same værdi og integralet over $[-\pi, \pi]$ bliver derfor dobbelt så stort. Det korrigerer vi og får

$$\begin{aligned}
s_n(x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,(f(x_0 + t) + f(x_0 - t))F_n(t)\,dt \\
&= (g * F_n)(0),
\end{aligned}$$

hvor $g(x) = \frac{1}{2}(f(x_0 - x) + f(x_0 + x))$ for $x \neq 0$ og $g(0) = \frac{1}{2}(f({x_0}^-) + f({x_0}^+))$. Funktionen g er da kontinuert og første punkt i denne sætning giver at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n(x_0) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} (g * F_n)(0) \\
&= g(0) = \tfrac{1}{2}\,(f({x_0}^-) + f({x_0}^+)).
\end{aligned}$$

Hvis endelig f er kontinuert på $[-\pi, \pi]$ da er f også uniform kontinuert. Sætning 4.7 giver da at $f * F_n \longrightarrow f$ uniformt på $\mathbb{R}$.

Sætning 5.9 (Fejers sætning) Lad $f \in L^1(-\pi, \pi)$ være givet. Da konvergerer σ_n mod f i 1-middel så

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f - \sigma_n\|_1 = 0.$$

Sætningen bevises ikke, men skal bruges i entydighedssætningen nedenfor.

Sætning 5.11 (Entydighedssætningen) Hvis $f \in L^1(-\pi, \pi)$ er en funktion hvor $c_n = 0$ for alle n da er $f = 0$ næsten overalt.

Når $c_n = 0$ er også $s_n = 0$ for alle n og dermed er $\sigma_n = 0$ for alle n. Fejers sætning giver at $\lim \|f - \sigma_n\|_1 = \lim \|f\| = 0$ sådan at $f = 0$ næsten overalt.

26 Konvergens af Fourierrækken i L^2

Definition af indre produkt på $L^2(-\pi, \pi)$ For $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ definerer vi $\langle f, g\rangle$ ved

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}.$$

Det kan vises at dette giver et indre produkt.

Sætning 5.12 Vi definerer f_n ved

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}.$$

Systemet udgør en ortonormalbasis for $L^2(-\pi, \pi)$.

Med det indre produkt fås at $f_n \perp f_m$ da

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_n \overline{f_m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

Her brugte vi at $e^i kt$ er en ulige funktion sådan at den har integral 0 hen over et symmetrisk interval omkring 0. Når $n = m$ så er $e^{i(n-m)t} = 1$ og integralet giver således 2π så vi i alt får 1. Dermed er $\{f_n\}$ et ortonormalsystem.

Vi viser at $\{f_n\}$ er maksimalt ved at forsøge at udvide det med $f \neq 0$ hvor $\langle f, f_n\rangle = 0$ for alle n. Da $L^2(-\pi, \pi) \subset L^1(-\pi, \pi)$ ligger f også i L^1 og Fourierkoefficienterne c_n for f er alle lig 0. Sætning 5.11 giver da at $f = 0$ næsten overalt. Idet $\{f_n\}$ er maksimalt udgør det en ortonormalbasis.

Definition af Fourierrække For $f \in L^1(-\pi, \pi)$ definerer vi *Fourierrækken* for f ved

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

hvor c_n er givet ved

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Vi får at $\sqrt{2\pi}\,c_n = \langle f, f_n\rangle$ idet

$$\langle f, f_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{f_n} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-inx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c_n.$$

Definition af afsnitssum Vi betegner den *n'te afsnitssum* i Fourierrækken for f med s_n så

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Sætning 5.13 Lad f være en funktion i $L^2(-\pi,\pi)$ med Fourierkoefficienterne $\{c_n\}$. Da er

(a) $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ i L^2, altså $\|f - s_n\|_2 \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.

(b) $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ (Parsevals formel).

Hvis vi omvendt har en følge $\{c_n\}$ i ℓ^2, hvor altså $\sum |c_n|^2 < \infty$, da kan vi definere en funktion $g \in L^2(-\pi,\pi)$ ved

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

hvis Fourierkoefficienter er $\{c_n\}$.

Idet $\{f_n\}$ er et ortonormalsystem for $L^2(-\pi,\pi)$ giver sætning 2.12

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, f_n\rangle f_n(x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\,c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

Samme sætning giver også at

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sqrt{2\pi}\,c_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Hvis vi omvendt har $\{c_n\}$ i ℓ^2 da er de symmetriske afsnitssummer s_n en Cauchyfølge i L^2 idet der for $n \geqslant m$ gælder at

$$\begin{aligned} &|s_n(t) - s_m(t)| \\ &\quad= \Big|\sum_{k=m+1}^{n} c_k e^{ikt} + c_{-k}e^{-ikt}\Big| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |c_k e^{ikt}| + |c_{-k}e^{-ikt}| \\ &\quad= \sum_{k=m+1}^{n} |c_k| + |c_{-k}| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} |c_k| + |c_{-k}|. \end{aligned}$$

Da række $\sum |c_k|^2$ er konvergent går halerne mod 0 og således går $|s_n(t) - s_m(t)|$ mod 0 for $\min(n, m) \longrightarrow \infty$. Da $L^2(-\pi, \pi)$ er fuldstændigt er enhver Cauchyfølge konvergent i $L^2(-\pi, \pi)$. Så

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n = g \in L^2(-\pi, \pi).$$

Fourierkoefficienter for g bliver $\{c_n\}$ da der for alle $m \in \mathbb{Z}$ med $-|n| \leqslant m \leqslant |n|$ gælder at

$$\begin{aligned}\langle s_n, f_m \rangle &= \Big\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\cdot}, f_m \Big\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \langle c_k e^{ik\cdot}, f_m \rangle \\ &= \langle c_k e^{im\cdot}, f_m \rangle = c_k \big\langle e^{im\cdot}, 1/\sqrt{2\pi}\, e^{im\cdot} \big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_m.\end{aligned}$$

Her brugte vi linearitet af det indre produkt i første variabel og det at f_m er ortogonal med $e^{ik\cdot}$ når $k \neq m$.

Lader vi nu n gå mod uendelig for et fastholdt m, så får vi at $\langle g, f_m \rangle = c_m$ da det indre produkt er kontinuert. Dermed er Fourierkoefficienterne for g givet ved $\{c_n\}$.